Architecture et Système

Stefan Schwoon

Cours L3, 2020/21, ENS Cachan

Entiers

Les entiers (tels qu'on les utilise dans les langages de programmation habituels) sont stockés dans un mot de taille fixe (typiquement 8, 16, 32 bits).

Types en C: `char`, `short int`, `int`, `long int`, `long long int`

En C, les tailles de ces types ne sont pas précisement définis par le langage de C, seulement leurs tailles minmales : 8, 16, 16, 32, 32, où `int` est un mot de registre.

On peut obtenir les valeurs concrètes avec `sizeof(char)` etc.

Big vs little endian

Un mot de taille > 8 s'étend sur plusieurs octets, p.ex. avec 32 bits:

12	34	56	78

Sous l'interprétation big-endian, ceci représente $(12345678)_{16}$ (les bits les plus significatifs sont dans le premier octet).

Little-endian: c'est l'inverse, on interpréte cela comme $(78563412)_{16}$.

Le mode d'interprétation devient important lors des échanges des données binaires (fichiers, réseau). P.ex., l'Internet protocol (IP) définit cet ordre comme big-endian.

Fonctions en C : `ntohl`, `ntohs`, `htonl`, `htons`

Entiers avec/sans signe

Un mot de n bits peut représenter 2^n valeurs différentes. Les opérations arithmétiques travaillent implicitement modulo 2^n.

Deux interprétations :

`unsigned` (sans signe), le domaine est de 0 à $2^n - 1$.

`signed` (avec signe) / complément à deux : le domaine est de -2^{n-1} à $2^{n-1} - 1$

Pour les valeurs non-négatives, le bit le plus significatif (MSB) est de 0.
Pour les valeurs négatives, le MSB est de 1.

On obtient la représentation de $-i$ en prenant la négation (bit par bit) de i, puis en rajoutant 1. P.ex., $-1 \mathrel{\widehat{=}} 11\cdots1$ et $-2^{n-1} \mathrel{\widehat{=}} 10\cdots0$.

Addition des entiers sans/avec signe

Dans l'ALU, l'addition de deux entiers est la même opération, quelque soit l'interprétation (sans/avec signe).

En effet dans le complément à deux, l'addition de i and $-i$ en utilisant l'addition habituelle donne 0.

La question d'interprétation intervient donc uniquement lors de la saisie/affichage de données.

Multiplication des entiers sans/avec signe

La multiplication de deux mots à n bits donne un mot à $2n$ bits.

En utilisant la multiplication naïve, la partie inférieure du résultat reste correcte, mais la partie supérieure est en général incorrecte.

P.ex., sur 4 bits, $3 \cdot (-2) = (0011)_2 \cdot (1110)_2 = (00101010)_2$.
Évidemment, le résultat interprété sur les 8 bits est incorrect, mais sur les 4 bits inférieurs $(1010)_2 = -6$ le résultat est bon.

Deux instructions assembleur : `MUL` (multiplication sans signe), `IMUL` (multiplication avec signe).

En C

Les types entiers peuvent être déclaré comme `signed` ou `unsigned` ;
par défaut ils sont `signed`.

Pour des `char` cette distinction n'est pas important lorsqu'on les interprète comme des caractères.

Attention aux opérateurs de décalage (<< et >>) :

pour les `unsigned`, l'opération est dite *logique*, le décalage se fait sur l'intégralité du mot, en inclus le bit le plus significatif;

pour les `signed`, l'opération est dite *arithmétique*, elle conserve le signe.

Valeurs réelles

Les valeurs réelles sont typiquement représentées dans un format virgule flottante, dans un mot de taille fixe, avec une précision limitée.

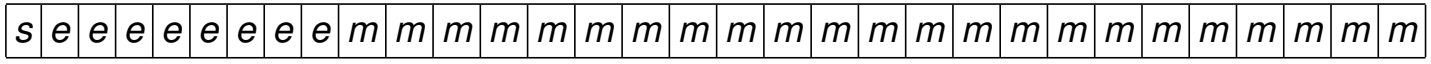
Idée en général : tuple $\langle s, m, e \rangle$ avec l'interprétation $\pm 2^e \cdot m$.

s est le signe (un seul bit, `0` non-négatif, `1` négatif);

m est la mantisse;

e est l'exposant.

$\rightarrow$ compromis entre taille et précision des valeurs représentables.



Besoin des standards

Problèmes:

Comment repartir les bits entre taille et mantisse ?

Représentations non uniques : $\langle s, m, e\rangle \equiv \langle s, 2m, e-1\rangle$

Comment traiter des cas spéciaux (division par zéro), comment traiter les arrondis ?

Le standard le plus important pour règler ces questions s'appele IEEE 754.

En C : `float` en C = IEEE 754, 32 bit; `double` = IEEE 754 (64-bit).

Dans le suivant, on discutera la partie 32 bit, les autres parties étant similaires.

IEEE 754 (variante 32-bit)

IEEE 754 spécifie les conventions suivantes :

Signe : 1 bit; 0 pour positif, 1 pour négatif

Exposant : 8 bits, interprété sans signe, mais décalé de 127. P.ex., $(10000001)_2 = 129$, mais l'exposant effectif est de 2. Si tous les bits de l'exposant sont 1, voir ci-dessous.

Mantisse : 23 bits, interprété comme $1 + (m/2^{23})$, ce qui donne un résultat dans $[1, 2)$.

Remarques :

Cette interprétation de la mantisse garantit une représentation unique.

Cas spéciaux, si exposant est 1111 1111 : $\pm\infty$ (avec $m = 0$)
ou NaN (not a number, avec $m \neq 0$)

Addition dans les flottantes

Le standard IEEE définit la procédure à suivre pour effectuer des opérations arithmétiques (comment arrondir, comment traiter des cas spéciaux, . . .).

Discutons le cas d'une addition:

Soient $x = 2^{e_x} \cdot m_x$ et $y = 2^{e_y} \cdot m_y$ et $x > y$
(par simplicité on suppose qu'ils sont tous les deux positifs).

P.ex. $x = 2.5$ et $y = 0.75$, du coup,
$e_x = 1, m_x = 1.25, e_y = -1, m_y = 1.5$.

Représentation binaire :

0	1000 0000	0100 0000 0 · · · 0
0	0111 1110	1000 0000 0 · · · 0

On isole désormais la mantisse, mais en prenant compte de la “une cachée” :

$$\boxed{\begin{array}{l} 1\ 0100\ 0000\ 0\cdots\ 0 \\ 1\ 1000\ 0000\ 0\cdots\ 0 \end{array}}$$

L’exposant d’y est moins grand que celui de x de 2.
Du coup, on décale la mantisse d’y de 2 positions.

$$\boxed{\begin{array}{l} 1\ \ 0100\ \ 0000\ 0\cdots\ 0 \\ 0\ 0\ 110\ 0000\ 0\cdots\ 0 \end{array}}$$

L’addition des deux mantisses donne désormais :

$$\boxed{1\ 1010\ 0000\ 0\cdots\ 0}$$

Comme le résultat n'excède pas les 24 bits (une cachée plus 23 bits), on garde l'exposant de x et on enlève simplement l'une cachée de i_Z pour obtenir la mantisse du résultat.

0	1000 0000	1010 0000 0$\cdots$0

Si l'addition des mantisses avait débordé les 24 bits, il aurait d'abord fallu décaler i_Z à droit par une position (perdant un bit de précision).

Problèmes de virgule flottante

Précision limitée : certaines valeurs “rondes” comme 0.1 ou 2.3 ne sont pas représentables.

Erreurs d’arrondi; p.ex. $x + y$ donne x si x beaucoup plus grand qu’y.

Du coup, certaines lois comme distributivité ne sont plus valables.