

Architecture et Système

Stefan Schwoon

Cours L3, 2019/20, ENS Cachan

Fonctions arithmétiques: demi-additionneur

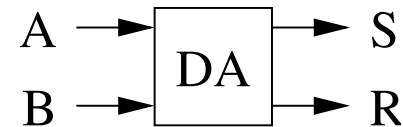
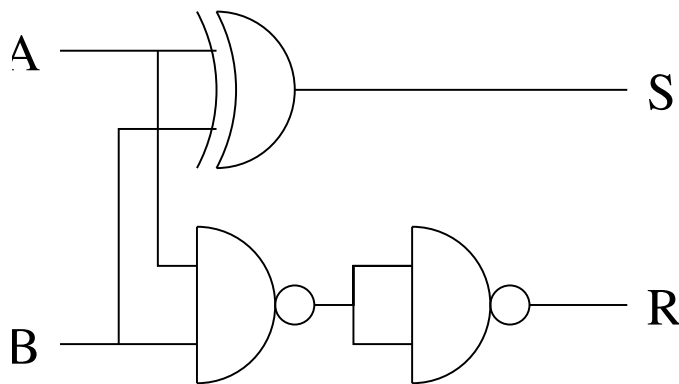
Fonction réalisée par un **demi-additionneur**:

deux bits en entrée, A et B ;

deux bits en sortie, R (la *retenue*) et S (la *somme*);

résultat souhaité : $(R.S)_2 = A + B$ (ou $.$ dénote la concaténation)

Réalisation potentielle :

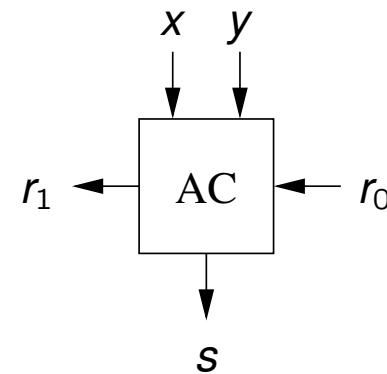
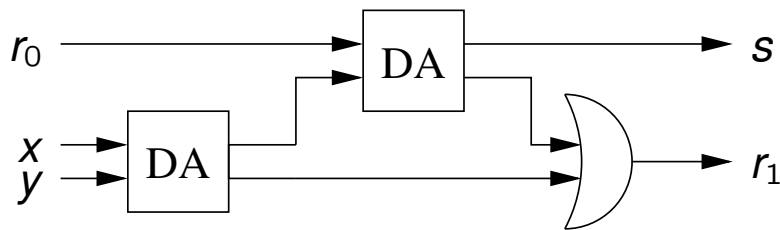


Additionneur complet

Un **additionneur complet** réalise l'addition de trois bits x , y et r_0 , où r_0 représente la retenue d'une autre addition.

Résultat souhaité : $(r_1.s)_2 = x + y + r_0$

Réalisation à l'aide des DA :



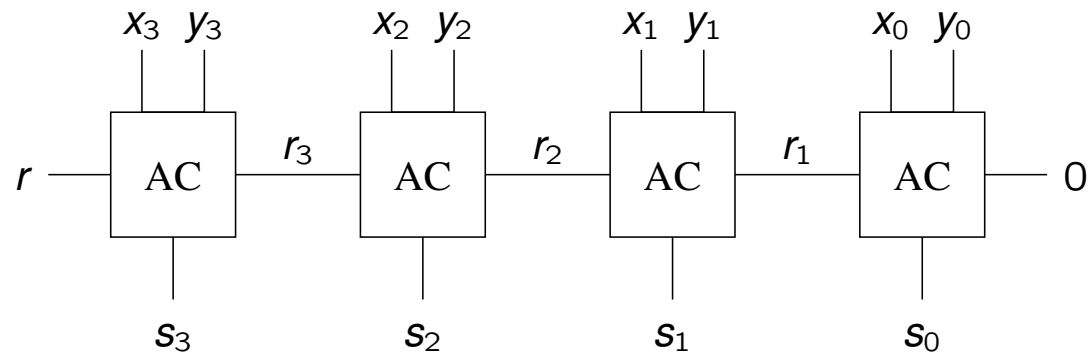
Addition de deux entiers

Supposons que nous avons deux entiers (non-négatifs) à deux bits :

$$x = (x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot x_0)_2 \text{ and } y = (y_3 \cdot y_2 \cdot y_1 \cdot y_0)_2.$$

On souhaite calculer $s = x + y$ sous la forme $s = (r \cdot s_3 \cdot s_2 \cdot s_1 \cdot s_0)_2$.

Réalisation avec enchaînement de quatre AC :



La généralisation du principe d'enchaînement à des vecteurs de n bits donnerait un circuit avec taille et profondeur $\mathcal{O}(n)$.

La profondeur est mauvaise car un ordinateur deviendrait deux fois plus lent si on augmente la taille des registres, p.ex. en passant de 32 à 64.

On va étudier une solution avec profondeur *logarithmique*.

Additionneur basé sur propagation/génération

Soit $0 \leq i \leq j < n$. On considère les bits aux positions i à j dans les vecteurs x et y en entrée :

le bloc $i..j$ **génère une retenue** si $r_{j+1} = 1$ *indépendamment* des bits sur d'autres positions (on note $g_{i,j} = 1$);

le bloc $i..j$ **propage la retenue** si $r_i = 1$ implique $r_{j+1} = 1$ (on note $p_{i,j} = 1$).

Calculer ces deux effets à partir de $(x_i, y_i) \cdots (x_j, y_j)$:

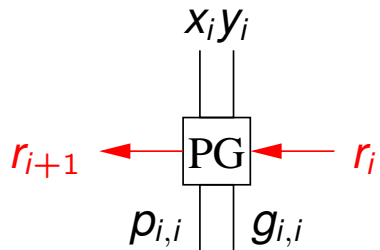
Si $i = j$, alors $g_{i,j} = 1$ ssi $x_i = y_i = 1$ et $p_{i,j} = 1$ ssi $x_i + y_i \geq 1$.

Sinon, soit $i \leq k < j$, alors:

$$g_{i,j} = g_{k+1,j} \vee (g_{i,k} \wedge p_{k+1,j}) \quad \text{et} \quad p_{i,j} = p_{i,k} \wedge p_{k+1,j}$$

Du coup, $r_{j+1} = g_{i,j} \vee (r_i \wedge p_{i,j})$.

Symbole pour un AC avec calcul des bits p/g en plus
(pour simplicité, la sortie “somme” est omise) :



Symbole pour calculer la combinaison des bits p/g de deux blocs adjacents :

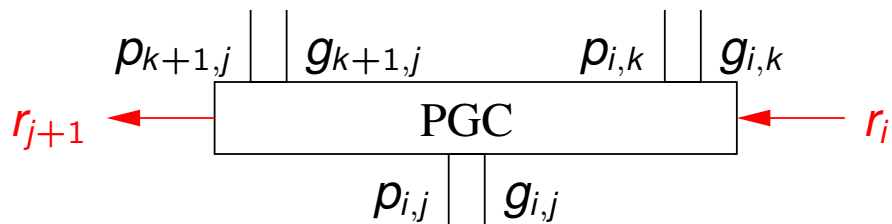
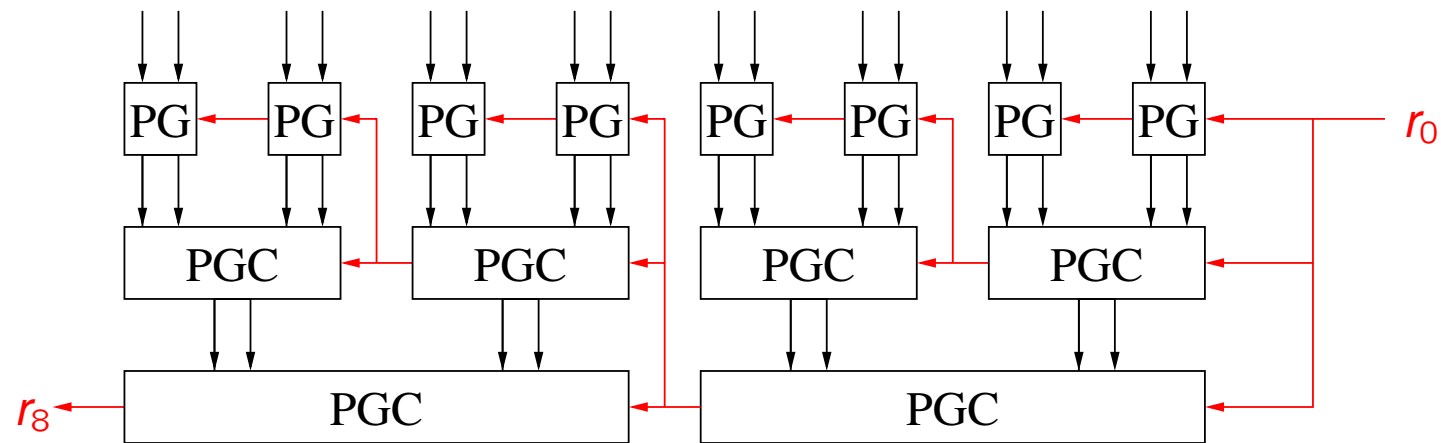


Diagramme simplifié pour $n = 8$, seule la propagation des retenue est détaillée :



Pour comprendre la profondeur du circuit, notons que

le calcul des p/g est indépendant des valeurs de retenues ;

la retenue d'un bloc PGC devient stable dès qu'on connaît les p/g et la retenue en entrée.

Du coup, le plus long chemin a une longueur d'environ $2 \log_2 n$.

Circuit pour multiplication

Soient $x = (x_{n-1} \cdots x_0)_2$ et $y = (y_{n-1} \cdots y_0)_2$ deux entiers naturels.

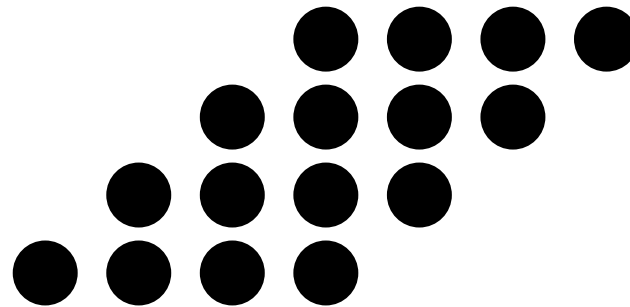
Construisons un circuit efficace pour $z = (z_{2n-1} \cdots z_0)_2$ tel que $z = x \cdot y$.

Technique de multiplication classique :

$$z = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (x_i \cdot y_j \cdot 2^{i+j})$$

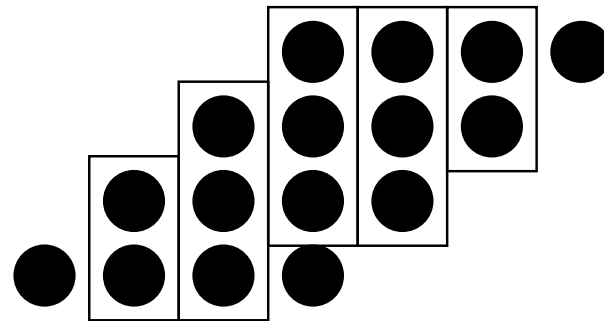
Notons que $x_i \cdot y_j \in \{0, 1\}$, du coup on obtient n^2 bits avec des “poids” différents.

Visualisation (pour $n = 4$), chaque boule représent un produit $x_i y_j$:

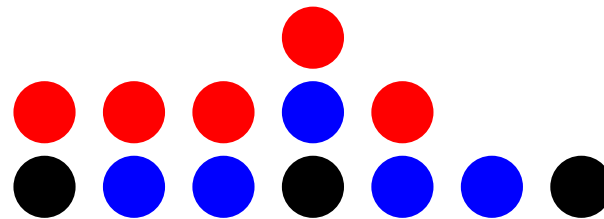


Ayant obtenu les n^2 bits, il faut donc faire l'addition dans les $2n$ colonnes (tout en propageant les retenues). Le nombre maximal de "boules" dans une colonne est de n .

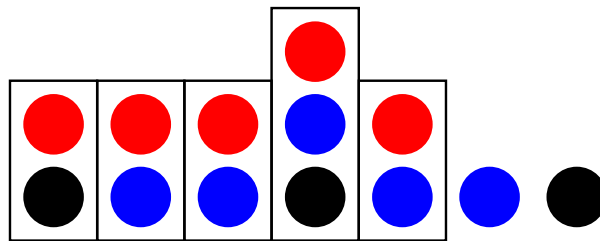
Principe : Successivement réduire les colonnes. On trouve des groupes de deux ou trois “boules” et on fait passer tous les groupes (en parallèle) par des DA ou AC.



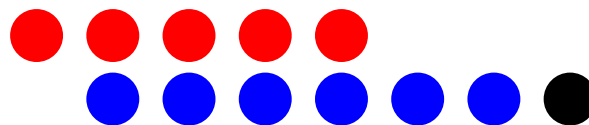
Ensuite on distribue les deux bits résultants (somme et retenue) aux bonnes colonnes :



Itération : identifier des groupes de deux ou trois ...



... ce qui donne :



Ayant réduit le résultat tout les colonnes à deux, on fait l'addition comme avant.

Analyse du multiplicateur

Il faut n^2 portes ET pour obtenir les produits de départ.

Ensuite, on réduit la hauteur des colonnes par un facteur d'environ $2/3$ par itération.

Une analyse précise montre qu'après $\log_{3/2} n$ itérations on obtient une hauteur d'au plus 4.

Une fois la hauteur réduite à 4, trois itérations supplémentaires sont suffisantes.

Du coup, la réduction se fait en profondeur $\mathcal{O}(\log n)$.

Le circuit pour l'addition finale est de taille $\mathcal{O}(n)$ et de profondeur $\mathcal{O}(\log n)$

Du coup, la multiplication entière se fait en taille $\mathcal{O}(n^2)$ et profondeur $\mathcal{O}(\log n)$.

Fonctions logiques sur les mots

Les ordinateurs permettent typiquement d'appliquer un opérateur logique sur tous les bits de deux mots en parallèle :

$$x \circ y = (x_{n-1} \circ y_{n-1}, \dots, x_0 \circ y_0)_2$$

Exemples :

cas $\circ = \wedge$: souvent utilisé avec des constants, p.ex. $x \wedge 16$ sert à isoler le 4ème bit de x .

cas $\circ = \vee$: fait l'union des bits qui sont 1, p.ex. $x := x \vee 16$ met le quatrième bit de x à 1.

Multiplexeur

Supposons qu'on possède k valeurs en entrée (ou $k = 2^n$), pour $n \geq 1$, ou chacune des valeurs x_0, \dots, x_{k-1} est un mot de m bits.

On souhaite sélectionner l'une de ces valeurs par son indice, p.ex. étant donné s (codé par n bits), on souhaite renvoyer x_s .

Applications:

Lire un mot dans la mémoire en spécifiant son adresse.

Choisir entre plusieurs sources de données.

Obtenir une valeur dans un tableau pré-calculé.

Multiplexeur : Exemple

Supposons $m = n = 1$, du coup on possède deux bits x_0, x_1 et un bit de sélection s_0 .

Solution: on réalise la fonction $(x_0 \wedge \neg s_0) \vee (x_1 \wedge s_0)$.

Supposons $m = 1, n = 2$, du coup on possède x_0, \dots, x_3 et $s_1 s_0$:

Dans un premier temps, on évalue s_0 pour sélectionner (en parallèle) entre x_0, x_1 et x_2, x_3 .

Dans un deuxième temps, on évalue s_1 pour sélectionner parmi les deux bits choisis avant.

Le problème se généralise pour $n > 2$ avec un circuit de profondeur $\mathcal{O}(n)$.

Pour $m > 1$: On utilise m circuits en parallèle, un par bit.