Langages Formels

Exercice 1 — Lemme de Dickson et PDA
Soit $k \geq 1$ quelconque. On note $\mathbb{N}^k$ les vecteurs de dimension k composés des entiers naturels, et pour $v \in \mathbb{N}^k$ on note $v_1, \ldots, v_k$ les éléments de v. Pour $x, y \in \mathbb{N}^k$ on note $\leq$ l'ordre partiel tel que $x \leq y$ ssi $x_i \leq y_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, et on écrit $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$.

Soit $(v_i)_{i \geq 0}$ une suite infinie dans $\mathbb{N}^k$ et $V := \{\, v_i \mid i \geq 0 \,\}$. On note $\min V = \{\, v \in V \mid \neg \exists x \in V : x < v \,\}$.

Le lemme de Dickson peut-être formulée dans plusieurs formes équivalentes, par exemple :

(i) $\min V$ est un ensemble fini.

(ii) Il existe une suite strictement croissante $i_0 < i_1 < \cdots$ telle que $v_{i_j} \leq v_{i_{j+1}}$ pour tout $j \geq 0$.

1. Montrer que (i) et (ii) sont équivalents.
2. Prouver (ii), par récurrence sur k.

Le lemma de Dickson est souvent utile pour montrer des propriétés sur les automates avec un espace de configurations infini. Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F \rangle$ un automate à pile. Pour $\langle p, z \rangle \in Q \times \Gamma^*$ on note $p, z \to^\omega$ s'il existe une suite infinie de transitions de $\mathcal{A}$ à partir de $\langle p, z \rangle$. Une application simple du lemme de Dickson (pour $k = 1$) est le suivant :

3. Montrer que $p, z \to^\omega$ ssi il existe une paire $\langle q, a \rangle \in Q \times \Gamma$ et des mots $u, v \in \Gamma^*$ tels que (i) $p, z \to^* q, ua$ et (ii) $q, a \to^+ q, va$.
4. Proposer une méthode pour calculer les paires $\langle p, z \rangle$ avec $p, z \to^\omega$.

Exercice 2 — Exprimer des propriétés dans MSO

Dans le suivant, $x, y, \ldots$ sont des variables du premier ordre et $X, Y, \ldots$ des variables monadiques du second ordre.

On exprimera les propriétés suivantes avec des formules de MSO :

- $\mathit{first}(x)$ – x est la première position dans un mot
- $\mathit{last}(x)$ – x est la dernière position dans un mot
- $\mathit{entre}(x, z, y)$ – z est une position entre x et y
- $\mathit{next}(x, y)$ – y est la prochaine position après x
- $x \neq y$
- $\mathit{sing}(X)$ – X ne contient qu'un seul élément
- $X \cup Y = \mathit{pos}(w)$ (pour le mot w sur lequel on interprète la formule)
- $\mathit{paires}(X)$ – X contient exactement les positions paires
- $\mathit{pair}(X)$ – $|X|$ est pair

Exercice 3 — MSO et langages réguliers

Exprimer les langages suivants avec une formule MSO :

- $L_1 = (ab)^*$
- $L_2 = \{ w \mid |w|_a \text{ est pair} \}$
- $L_3 = \Sigma^* \setminus \{ wabw' \mid w, w' \in \Sigma^* \}$

Exercice 4 — Reconnaissance par morphisme

1. Exhiber un monoïd et un morphisme pour reconnaître le langage L_2.
2. Soit $M = \langle \{\varepsilon, a, b, ba, \perp\}, \cdot, \varepsilon \rangle$ un morphisme. Spécifier l'opération $\cdot$ et un morphisme ϕ tel que L_3 est reconnu par ϕ (tous les mots dans L_3 donnent un élément autre que $\perp$.
3. Montrer que les langages reconnus par morphismes sont fermés par union, intersection, complémentaire.