Examen – Concepts et Model-Checking

7 mars 2022

Durée: 105 minutes.

1 LTL et Automates de Büchi

Soit $AP = \{p, q\}$. Pour les paires ϕ_1, ϕ_2 de formules suivantes, résoudre ces questions :

- Donner des automates de Büchi pour ϕ_1 et pour ϕ_2.
  L'utilisation de la construction systématique montrée en cours n'est ni requise ni recommandée.
- Est-ce que ϕ_1 implique ϕ_2 ? Si ce n'est pas le cas, donner un mot infini sur 2^{AP} qui satisfait ϕ_1 mais pas ϕ_2.
- La même question avec les rôles de ϕ_1 et ϕ_2 inversés.

(a) $\phi_1 = \mathbf{F}\,(p \to \mathbf{F}\,q)$ et $\phi_2 = (\mathbf{F}\,p) \to (\mathbf{F}\,q)$;

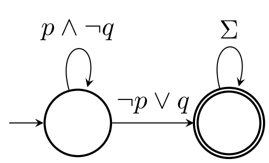
Solution : Avec les lois d'équivalence et idempotence, on obtient

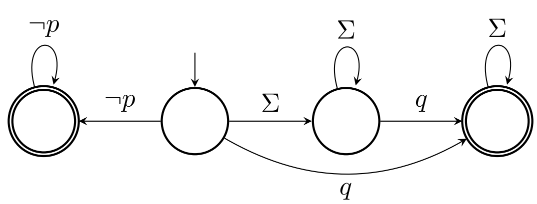
$$\mathbf{F}\,(p \to \mathbf{F}\,q) \equiv \mathbf{F}\,(\neg p \vee \mathbf{F}\,q) \equiv (\mathbf{F}\,\neg p) \vee (\mathbf{F}\,q) \equiv \mathbf{F}\,(\neg p \vee q)$$

et

$$(\mathbf{F}\,p) \to (\mathbf{F}\,q) \equiv \neg(\mathbf{F}\,p) \vee (\mathbf{F}\,q) \equiv (\mathbf{G}\,\neg p) \vee (\mathbf{F}\,q)$$

ce qui justifie les automates suivants:



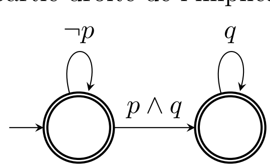


ϕ_1 n'implique pas ϕ_2 car $\{p\}\emptyset^\omega$ est modèle de ϕ_1 mais pas de ϕ_2.

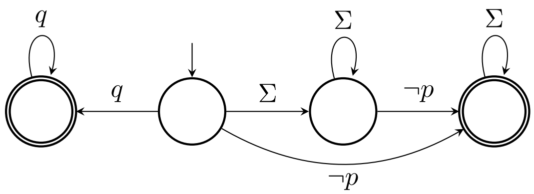
Par contre ϕ_2 implique bien ϕ_1: tout modèle de ϕ_2 satisfait soit $\mathbf{G}\,\neg p$ ce qui implique $\mathbf{F}\,\neg p$, soit $\mathbf{F}\,q$, et on sait que $\phi_1 \equiv \mathbf{F}\,\neg p \vee \mathbf{F}\,q$.

(b) $\phi_1 = \mathbf{G}\,(p \to \mathbf{G}\,q)$ et $\phi_2 = (\mathbf{G}\,p) \to (\mathbf{G}\,q)$.

Solution : Pour ϕ_1, soit p ne tient jamais (alors la partie gauche de l'implication est toujours vraie), ou la première fois qu'on a p on a aussi $\mathbf{G}\,q$, et à partir de ce moment la partie droite de l'implication est toujours vraie.



On a $(\mathbf{G}\, p) \rightarrow (\mathbf{G}\, q) \equiv \neg(\mathbf{G}\, p) \vee (\mathbf{G}\, q) \equiv (\mathbf{F}\, \neg p) \vee (\mathbf{G}\, q)$:

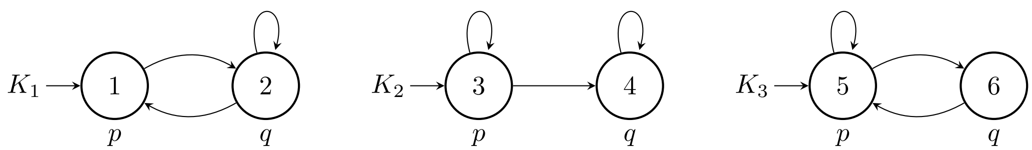


ϕ_1 implique bien ϕ_2. Tout suffixe d'un mot infini satisfaisant ϕ_1 doit satisfaire $\neg p \vee \mathbf{G}\, q$, dont notamment le mot entier; du coup soit la première lettre ne contient pas p (on satisfait alors $\mathbf{F}\, \neg p$), soit $\mathbf{G}\, q$ est satisfait.

ϕ_2 n'implique pas ϕ_1 car $\{p\}\emptyset^\omega$ est modèle de ϕ_2 mais pas de ϕ_1.

2 CTL

On considère les structures suivantes, avec les prédicats p et q, et des formules de CTL.

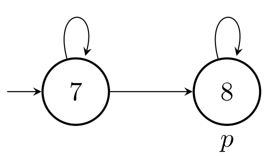


(a) Pour les formules suivantes, donner les états (dans les trois structures) qui satisfont la formule.

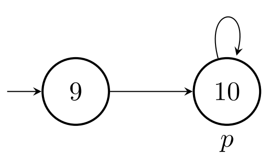
- $\mathbf{AG}\,\mathbf{AF}\, q$;
  Solution : $\mathbf{AF}\, q$ est satisfait par 1,2,4,6, alors $\mathbf{AG}\,\mathbf{AF}\, q$ l'est par $1, 2, 4$.
- $\mathbf{EG}\,\mathbf{AF}\, p$;
  Solution : $\mathbf{AF}\, p$ est satisfait par 1,3,5,6, alors $\mathbf{EG}\,\mathbf{AF}\, p$ l'est par $3, 5, 6$.
- $\mathbf{AF}\,\mathbf{EG}\, p$;
  Solution : $\mathbf{EG}\, p$ est satisfait par 3,5, alors $\mathbf{AF}\,\mathbf{EG}\, p$ l'est par $3, 5, 6$.

(b) Donner des structures de Kripke où l'état initial satisfait les propriétés suivantes:

- $\mathbf{AG}\,\mathbf{EF}\, p$ mais pas $\mathbf{AG}\,\mathbf{AF}\, p$;
  Solution :

- $\mathbf{AG}\,\mathbf{AF}\, p$ mais pas $\mathbf{AG}\, p$.
  Solution :

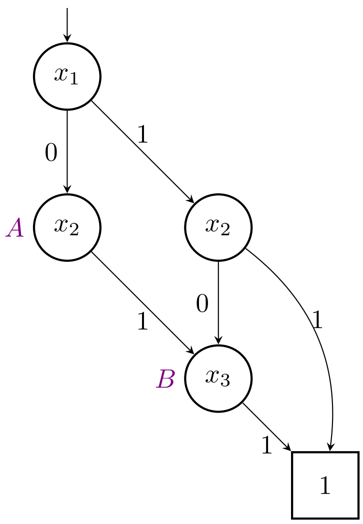
  

3 Diagrammes de décision binaires

On considère l'ordre $x_1 \prec x_2 \prec x_3$.

(a) Donner le BDD de la fonction de majorité qui vaut 1 ssi la majorité des x_i valent 1.

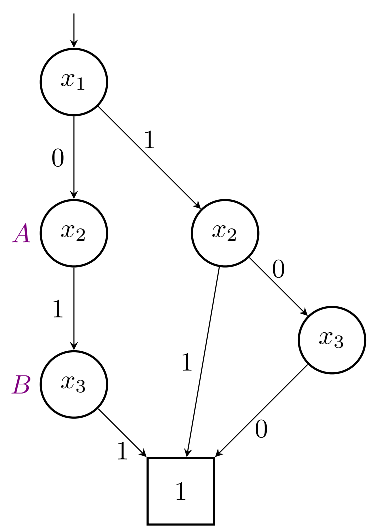
Solution : Au moins deux variables doivent être vraies.



(b) Donner le BDD de la fonction qui vaut x_s, avec $s = \sum_{i=1}^{3} x_i$ (et par convention $x_s := 0$ si $s = 0$).

Solution : Si la fonction a l'air compliqué, il convient de dessiner la table de vérité qui n'a que 8 lignes.

x_1	x_2	x_3	s	x_s
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	2	1
1	0	0	1	1
1	0	1	2	0
1	1	0	2	1
1	1	1	3	1

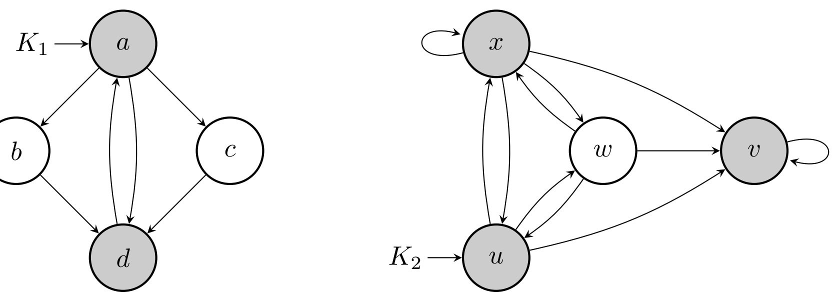


(c) Parmi les sommets des BDD de (a) et (b), lesquels représentent des (sous-)BDDs identiques ?

Ce sont les sommets A resp. B dans les deux dessins.

4 Simulation et bisimulation

On considère les deux structures ci-dessous. Il y a un seul prédicat p, les états satisfaisant p sont indiqués en gris.



(a) Est-ce K_2 simule K_1? Si oui, donner une relation de simulation. Sinon, pourquoi ?

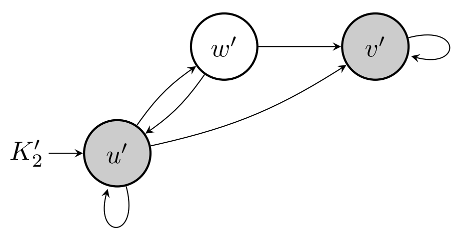
Solution : Oui, avec la relation $\{\langle a, u\rangle, \langle b, w\rangle, \langle c, w\rangle, \langle d, x\rangle\}$. On prouvera facilement au cas-par-cas que cette relation obéit à toutes les exigences.

(b) Est-ce K_1 simule K_2? Si oui, donner une relation de simulation. Sinon, pourquoi ?

Solution : Non, p.ex. K_2 peut réaliser une séquence gris-gris-blanc mais pas K_1.

(c) Peut-on trouver une structure avec moins d'états que K_2 mais qui est bisimilaire ? Si oui, donner la structure et la relation de bisimulation. Sinon, pourquoi ?

Solution : Oui, en fusionnant u et x:



La relation $\{\langle u, u'\rangle, \langle x, u'\rangle, \langle v, v'\rangle, \langle w, w'\rangle\}$ est une relation de bisimulation entre K_2 et K_2'.