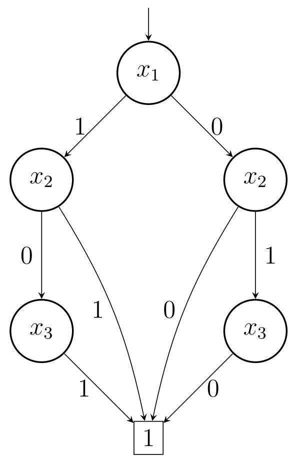
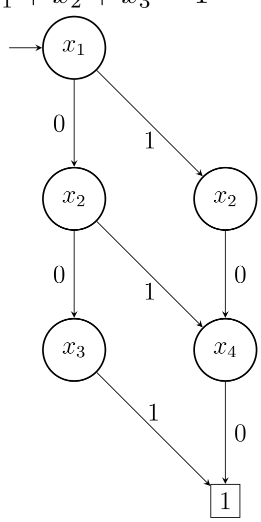
Concepts et Model Checking – TD 4 – Solutions

Question 1 – Calcul de BDDs

1. $(x_1 \leftrightarrow x_2) \vee (x_1 \leftrightarrow x_3)$

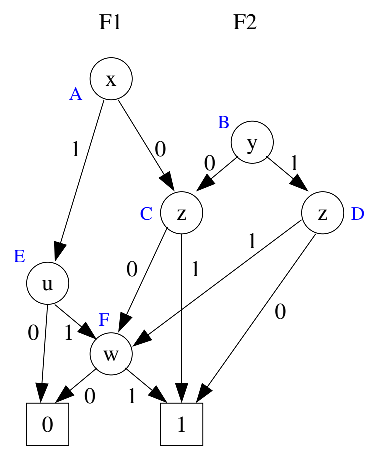


2. $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

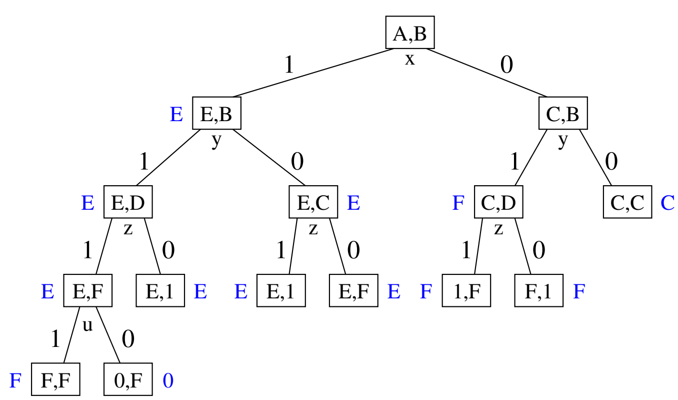


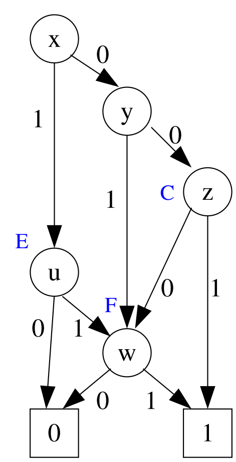
Question 2 – Opérations logiques

1. Pour F_1, notons que $F_1[x/1] = u \wedge w$ and $F_1[x/0] = w \vee z$. Dans le dessin ci-dessous, les sous-graphes communs entre F_1 et F_2 sont déjà partagés.



2. Voici une représentation du fonctionnement de l'algorithme recursif. Chaque boîte représente un sous-problème avec une paire des sommets de (a). Le résultat de tout sous-problème est noté à côté de chaque boîte (dans la mesure où il correspond à un sommet déjà connu).

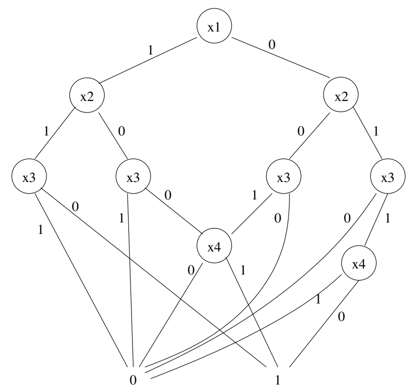




Question 3 Nombre de BDD différents

Soit $P_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble de variables, pour $n \geq 1$, où $x_i < x_j$ ssi $i < j$.

1. On peut avoir au plus un sommet avec x_1, deux avec x_2 et quatre avec x_3. Le nombre de sommets étiquetés par x_4 est de deux car les arêtes sortantes doivent méner aux deux feuilles 1 et 0. Le dessin illustre un BDD avec un nombre maximal de sommets.



2. Avec cinq ou six variables, le nombre de sommets pour la dernière variable reste à deux, appellons ces sommets a et b, respectivement. Pour la variable précédente, on a au plus $4 \cdot 3 = 12$ sommets ; quatre choix pour l'arête sortante étiquetée par 1 $(a, b, 1, 0)$, et les trois choix restants pour l'autre arête.

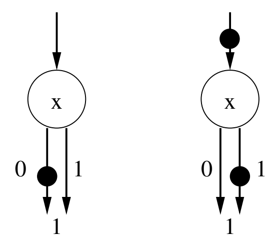
   Du coup, avec cinq variables, on peut au plus avoir $1+2+4+8+2 = 17$ sommets (autre que les feuilles), et pour six variables $1 + 2 + 4 + 8 + 12 + 2 = 29$.

3. En général, le nombre de sommets étiquetés par x_i est limité par deux facteurs indépendants :
   — Le nombre de sommets accessibles depuis la racine, qui est de 2^{i-1}.
   — Le nombre de différentes fonctions booléennes expressibles avec les variables $x_i, \ldots, x_n$, et dans lesquelles x_i est non-redondant. Il est bien connu qu'avec k variables booléennes on peut exprimer 2^{2^k} fonctions booléennes différents (nombre de différentes tables de vérité avec k variables). Il en faut déduire les fonctions dans lesquelles x_i est redondant, ce qui correspond aux fonctions expressibles avec seulement $x_{i+1}, \ldots, x_n$. Du coup ce nombre est de $2^{2^{n-i+1}} - 2^{2^{n-i}}$.

Du coup en général $N_i^n = \min\{2^{i-1}, 2^{2^{n-i+1}} - 2^{2^{n-i}}\}$. On vérifie que ces calculs correspondent aux chiffres dans (a) et (b) pour chaque variable.

Question 4 BDD avec complément

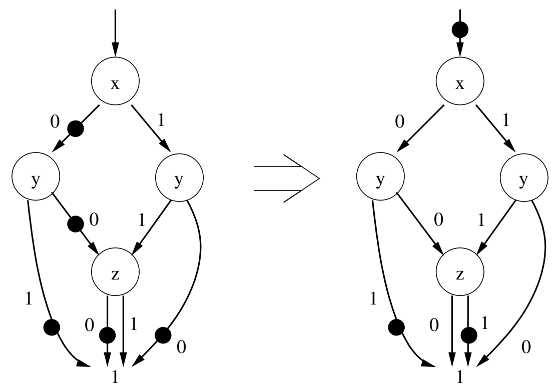
1. Pour montrer la non-canonicité des CBDD, il suffit d'exhiber un diagramme équivalent à celui de A :



2. Tous les chemins d'un CBDD mènent à la seule feuille 1. Du coup, pour un chemin donné, c'est la parité du nombre de négations qui détermine si le chemin vaut 0 ou 1.

   Supposons qu'on possède un sommet n dont le bit de négation sur son arête sortante '0' est actif. En invertant les bits de toutes les arêtes incidentes à n (entrantes et sortantes), la parité des chemins passant par n reste inchangée (tout chemin qui passe par n contient une arête entrante et une arête sortante). Si on applique cette modification itérativement "du bas vers le haut", i.e. en commençant avec les variables maximales de l'ordre, on peut successivement éliminer toutes les bits de négations sur les arêtes '0'.

3. Pour le résultat de cette conversion sur A, voir (a).
   Pour C, le résultat est comme suite.


x
0
1
y
y
0
1
z
1
0
1
0
1
x
0
1
y
y
0
1
z
1
0
1
0
1