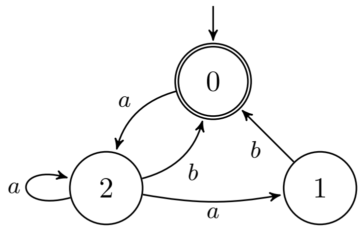
Partiel

Durée : 2 heures. Tous les documents sur support papier sont autorisés. Les nombres $[n]$ en marge sont des indications de durée ou de difficulté, pas nécessairement du nombre de points associés à chaque question. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 (Automates)**.** On considère l'automate fini suivant :



[1] 1. Calculer une expression rationnelle équivalente en utilisant un algorithme par élimination d'états (Brzozowski–McCluskey ou McNaughton–Yamada).

[1] 2. Construire l'automate minimal canonique équivalent.

Exercice 2 (Expressions étendues)**.** On considère des expressions rationnelles *étendues* sur un alphabet Σ, définies par la syntaxe abstraite :

$$E ::= \emptyset \mid a \mid E + E \mid E \cdot E \mid E^* \mid E \cap E \mid -E$$

où $a \in \Sigma$. La sémantique dénotationnelle est étendue par $L(E \cap F) \stackrel{\text{def}}{=} L(E) \cap L(F)$ et $L(-E) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma^* \setminus E$.

[2] 1. Montrer que l'on sait décider le problème du vide des expressions étendues, c'est-à-dire pour une expression E donnée en entrée, déterminer si $L(E) = \emptyset$. Quelle complexité obtenez-vous ?

[2] 2. Montrer que l'on sait décider en temps polynomial le problème du mot des expressions étendues, c'est-à-dire pour une expression E et un mot $w \in \Sigma^*$ données en entrée, déterminer si $w \in L(E)$.

Exercice 3 (Taille des automates et des grammaires)**.** Soient $k > 0$ et $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}$. On considère le langage $L_k \stackrel{\text{def}}{=} \{uv\$v'u^R \mid u \in \Sigma^k, v, v' \in \Sigma^*\}$ où u^R dénote le miroir de u.

[3] 1. Montrer que tout automate fini *non* déterministe reconnaissant L_k a au moins 2^k états.

[1] 2. Donner pour tout k une grammaire algébrique de taille $O(k)$ qui génère L_k.

Exercice 4 (Langages algébriques)**.**

[2] 1. Montrer que le langage $L \stackrel{\text{def}}{=} \{ww^Rw \mid w \in \{a,b\}^*\}$ n'est pas algébrique, où w^R dénote le mot miroir de w.

[3] 2. Montrer que $\{a,b\}^* \setminus L$ est algébrique.

[3] 3. Montrer que le problème, étant donné en entrée un langage algébrique sur $\{a,b\}^*$, de savoir s'il contient un palindrome pair, est indécidable. *Indice : réduire depuis le problème de correspondance de* Post.

Exercice 5 (Grammaires (fortement) LL)**.**

1. Soit la grammaire algébrique

$$
\begin{aligned}
S &\to aA \mid bAb \\
A &\to ab \mid a
\end{aligned}
$$

[2] (a) Est-elle LL(k) pour un certain k ? Est-elle fortement LL(k) pour un certain k ?

[1] (b) Existe-t'il une grammaire LL(1) équivalente ? Une grammaire LL(0) équivalente ?

[5] 2. Montrer que si une grammaire $\mathcal{G}$ est LL(k), alors on peut construire une grammaire fortement LL(k) $\mathcal{G}'$ équivalente, qui utilise des non-terminaux de la forme (A, F) où $F \subseteq \mathrm{Suiv}_k(A)$. *Indice : Les dérivations gauches de $\mathcal{G}'$ doivent être telles que, si $(S, \{\varepsilon\}) \Rightarrow^*_{\mathrm{lm},\mathcal{G}'} u(A,F)\delta$ pour $u \in \Sigma^*$ et $\delta \in (N \cup \Sigma)^*$, alors $F = \mathrm{Prem}_k(\delta)$; c'est à démontrer dans votre réponse.*