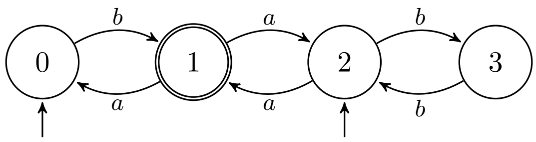
Partiel

Durée : 2 heures. Tous les documents sur support papier sont autorisés. Les nombres $[n]$ en marge sont des indications de durée ou de difficulté, pas nécessairement du nombre de points associés à chaque question. Toutes les réponses doivent être justifiées.

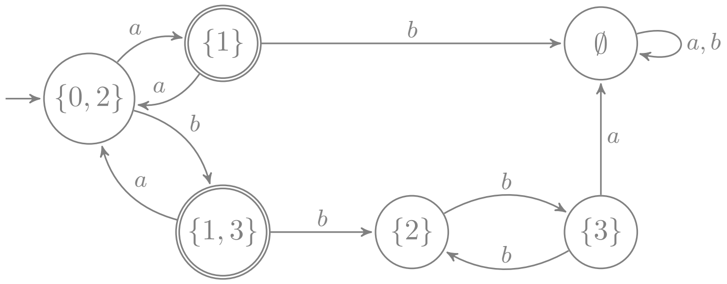
[2] **Exercice 1** (Minimisation)**.** Donner l'automate minimal canonique pour l'automate suivant :



Nous avons vu trois principales méthodes en cours pour la minimisation :
- l'algorithme de Moore,
- le théorème de Brzozowski,
- l'automate des résiduels.

Cette dernière méthode est difficile à mettre en pratique, car les erreurs de calcul des résiduels sont courantes. Les deux premières sont plus faciles ; en particulier la seconde est particulièrement adaptée à l'exercice puisque l'automate fourni est co-accessible et co-déterministe, donc par le théorème de Brzozowski son déterminisé est minimal ; une seule copie a proposé cette solution.

Pour les deux premières méthodes, il faut donc calculer la partie accessible du déterminisé et la compléter :



Attention à une erreur courante : seul l'état $\{0, 2\}$ est initial dans le déterminisé ; l'état $\{2\}$ n'est *pas* initial et l'état $\{0\}$ n'est pas accessible.

Exercice 2 (Automates à inspection de pile)**.** Un automate *à inspection régulière de pile* est un automate à pile $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0 \rangle$ où les transitions forment un sous-ensemble fini de $Q \times \Gamma \times \mathrm{Rat}(\Gamma^*) \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q \times \Gamma^*$. Le *langage d'inspection* L_t

d'une transition $t = (q, z, L_t, a, q', \gamma'') \in \delta$ est représenté concrètement à l'aide d'un automate fini $\mathcal{A}_t = \langle P_t, \Gamma, \Delta_t, I_t, F_t \rangle$ tel que $L_t = L(\mathcal{A}_t)$. On considèrera aussi par la suite l'automate $\mathcal{A}_\delta = \langle P, \Gamma, \Delta, I, F \rangle$ qui est simplement l'union disjointe des $\mathcal{A}_t$ pour $t \in \delta$.[1]

La sémantique opérationnelle d'un automate à inspection régulière de pile considère comme d'habitude des configurations q, γ dans $Q \times \Gamma^*$ comportant un état et un contenu de pile (avec le sommet de pile à droite). Chaque transition $t = (q, z, L_t, a, q', \gamma'') \in \delta$ donne lieu à une étape d'exécution $q, \gamma \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}} q', \gamma'$ si et seulement si $\gamma = \gamma_1\gamma_2 = \gamma_3 z$ et $\gamma' = \gamma_3\gamma''$ où $\gamma_1, \gamma_3 \in \Gamma^*$ et $\gamma_2 \in L_t$; à noter que la transition ne consomme que le symbole z de sommet de pile. On définit le langage accepté par pile vide comme d'habitude par

$$N(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in Q \,.\, q_0, z_0 \xrightarrow{w}{}^{*}_{\mathcal{A}} q, \varepsilon\} \;.$$

Manifestement, tout automate à pile est aussi un automate à inspection régulière de pile où l'on s'est restreint au langage d'inspection $\{\varepsilon\}$.

1. On souhaite montrer qu'inversement, si $\mathcal{A}$ est un automate à inspection régulière de pile, alors il existe un automate à pile $\mathcal{A}'$ équivalent.

[2] (a) Définir une fonction de transition $\Delta' : 2^P \times \Gamma \to 2^P$, naturellement étendue à $2^P \times \Gamma^* \to 2^P$, telle que

$$\Delta'(I, \gamma) = \{p' \in P \mid \exists \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^*, p \in I \,.\, \gamma = \gamma_1\gamma_2 \text{ et } p \xrightarrow{\gamma_2}_{\mathcal{A}_\delta} p'\} \;. \qquad (*)$$

Une seule copie a parfaitement répondu à cette question. La morale est que la question était trop difficile, et qu'il ne faut pas hésiter à passer des questions sur lesquelles vous séchez.

Soit $\Delta(E, z) \stackrel{\text{def}}{=} \{p' \in P \mid \exists p \in E \,.\, (p, z, p') \in \Delta\}$ l'extension habituelle de Δ à des ensembles $E \subseteq P$ et à $z \in \Gamma$. On définit alors

$$\Delta'(E, z) \stackrel{\text{def}}{=} I \cup \Delta(E, z) \;.$$

L'extension à tout $\gamma \in \Gamma^*$ se fait comme d'habitude par

$$\Delta'(E, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} E \;,$$
$$\Delta'(E, \gamma\gamma') \stackrel{\text{def}}{=} \Delta'(\Delta'(E, \gamma), \gamma') \;.$$

On vérifie $(*)$ par induction sur $\gamma \in \Gamma^*$.

Pour le cas de base $\gamma = \varepsilon$, $\Delta'(I, \varepsilon) = I$ par définition, et effectivement $I = \{p' \in P \mid \exists \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^* \,.\, \gamma_1\gamma_2 = \varepsilon \text{ et } p \xrightarrow{\gamma_2}_{\mathcal{A}_\delta} p'\}$ puisque forcément $\gamma_1 = \gamma_2 = \varepsilon$ dans ce cas.

Pour l'étape d'induction, soit $\gamma = \gamma' z$ pour $\gamma' \in \Gamma^*$ et $z \in \Gamma$. On a $\Delta'(I, \gamma) = \Delta'(\Delta'(I, \gamma'), z)$ par définition. Par hypothèse d'induction, $\Delta'(I, \gamma') = \{p' \in P \mid \exists \gamma_1', \gamma_2' \in \Gamma^*, p \in I \,.\, \gamma' = \gamma_1'\gamma_2' \text{ et } p \xrightarrow{\gamma_2'}_{\mathcal{A}_\delta} p'\}$. On procède par double inclusion :

1. C'est-à-dire $P \stackrel{\text{def}}{=} \biguplus_{t\in\delta} P_t$, $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \biguplus_{t\in\delta} \Delta_t$, $I \stackrel{\text{def}}{=} \biguplus_{t\in\delta} I_t$ et $F \stackrel{\text{def}}{=} \biguplus_{t\in\delta} F_t$.

- si $p' \in P$ est tel qu'il existe γ_1, γ_2 et p comme dans $(*)$, alors
  - soit $\gamma_2 = \varepsilon$ et alors $p' \in I \subseteq \Delta'(I, \gamma)$;
  - soit $\gamma_2 \neq \varepsilon$ et donc $\gamma_2 = \gamma_2' z$ et $p \xrightarrow{\gamma_2'}_{\mathcal{A}_\delta} p'' \xrightarrow{z}_{\mathcal{A}_\delta} p'$ pour un certain $p'' \in \Delta(I, \gamma')$, et encore une fois $p' \in \Delta'(I, \gamma)$.
- si $p' \in \Delta'(I, \gamma)$, alors
  - soit $p' \in I$ et on pose $\gamma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \gamma$ et $\gamma_2 \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon$ dans $(*)$,
  - soit $p' \in \Delta(\Delta'(I, \gamma'), z)$ et on obtient une décomposition $\gamma' = \gamma_1' \gamma_2'$ telle que $p \xrightarrow{\gamma_2'}_{\mathcal{A}_\delta} p'' \xrightarrow{z}_{\mathcal{A}_\delta} p'$ pour $p \in I$ et $p'' \in \Delta'(I, \gamma')$, et on pose $\gamma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_1'$ et $\gamma_2 \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_2' z$ dans $(*)$.

[4] (b) Construire l'automate à pile $\mathcal{A}'$ utilisant des symboles de pile dans $\Gamma \times 2^P$ et prouver sa correction.

La construction pour cet exercice est essentiellement la même que celle vue dans l'exercice 3 du TD 6.

On pose $\mathcal{A}' \stackrel{\text{def}}{=} \langle Q, \Sigma, \Gamma', \delta', q_0, (z_0, I) \rangle$ avec $\Gamma' \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \times 2^P$ et

$$\begin{aligned} \delta' \stackrel{\text{def}}{=} \{ & (q, (z, E_0), a, q', (z_1, E_0) \cdots (z_m, E_{m-1})) \\ & \mid t = (q, z, L_t, a, q', z_1 \cdots z_m) \in \delta, \Delta'(E_0, z) \cap F_t \neq \emptyset \\ & \text{et } \forall 1 \leq j < m, E_j = \Delta'(E_{j-1}, z_j) \} \,. \end{aligned}$$

Soit $\pi : (\Gamma \times 2^P)^* \to \Gamma^*$ la projection définie par $\pi(z, E) \stackrel{\text{def}}{=} z$ pour tout $z \in \Gamma$ et $E \subseteq P$. La propriété cruciale à démontrer sur cet automate $\mathcal{A}'$ est que, pour n et pour toute exécution $q_0, (z_0, I) \to^n_{\mathcal{A}'} q, \rho\,(z, E_0)$ finissant sur une pile non vide avec $\rho \in (\Gamma \times 2^P)^*$, $E_0 = \Delta'(I, \pi(\rho))$. Ceci se démontre par induction sur n :

- cas de base $n = 0$: alors $z = z_0$ et $E_0 = I = \Delta'(I, \varepsilon)$;
- étape d'induction $n > 0$: on décompose l'exécution en $q_0, (z_0, I) \to^{n-1}_{\mathcal{A}'} q', \rho\,(z, E_0) \to_{\mathcal{A}'} q'', \rho\,(z_1, E_0) \cdots (z_m, E_{m-1})$. Par hypothèse d'induction, $E_0 = \Delta'(I, \pi(\rho))$. Par définition des transitions dans $\mathcal{A}'$, on vérifie bien que pour tout $1 \leq j < m$, $E_j = \Delta'(I, \pi(\rho) \cdot z_1 \cdots z_j)$, et en particulier pour $j = m - 1$.

La conséquence de la propriété précédente est que, pour toute exécution $q_0, (z_0, I) \to^*_{\mathcal{A}'} q, \rho\,(z, E_0)$, $\Delta'(E_0, z) = \Delta'(I, \pi(\rho) \cdot z)$, et par $(*)$ son intersection avec F_t est donc non vide si et seulement si $\pi(\rho) \cdot z$ appartient à L_t. L'équivalence entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ s'ensuit.

2. Un automate *à inspection algébrique de pile* permet similairement de vérifier si un suffixe de la pile courante appartient à un langage algébrique.

[3] Donner un automate à inspection algébrique de pile pour le langage $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$.

Cette question a été assez bien traitée dans l'ensemble, en proposant des automates le plus souvent qui empilent une série de a et de b lus sur l'entrée puis utilisent un langage d'inspection $L \stackrel{\text{def}}{=} \{\perp a^n b^n \mid n > 0\}$ pour permettre de passer à un état de dépilage des b pour chaque c lu sur l'entrée, avant d'aller quand a apparaît en sommet de pile dans un état final qui vide la pile. Attention à une erreur courante : il est nécessaire d'avoir $\perp$ comme préfixe des mots de L, sans quoi une pile de la forme $\perp a^p a^n b^n$ pour $p > 0$ est aussi acceptée et l'automate reconnaît $\{a^m a^n b^n c^n \mid n > 0, m \geq 0\}$.

Exercice 3 (Grammaires (fortement) LL)**.**
Ce sont les questions 3 et 4 de l'exercice 3 du TD 7.

[2] 1. Montrer que la grammaire suivante est LL(2) :

$$\begin{aligned} S &\to aAab \mid bAb \\ A &\to cAB \mid \varepsilon \mid a \\ B &\to \varepsilon \end{aligned}$$

Pour rappel, une grammaire $\mathcal{G} = \langle N, \Sigma, P, S\rangle$ est LL(k) si, pour tout A dans N, toutes paires de productions $A \to \alpha_1 \neq A \to \alpha_2$ dans P, et toutes les dérivations gauches $S \Rightarrow^*_{\mathrm{lm}} uA\delta$ avec $u \in \Sigma^*$ et $\delta \in (N \cup \Sigma)^*$,

$$\mathrm{Prem}_k(\alpha_1\delta) \cap \mathrm{Prem}_k(\alpha_2\delta) = \emptyset\ .$$

Les deux productions de S ont clairement des premiers disjoints et B n'a qu'une seule production. Il reste à traiter le cas de A. Il y a deux ensembles de dérivations gauches faisant apparaître A dans la grammaire :

(a) $S \Rightarrow_{\mathrm{lm}} aAab \Rightarrow^n_{\mathrm{lm}} ac^nAB^nab$ où $\mathrm{Prem}_2(B^nab) = \{ab\}$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Prem}_2(cABB^nab) &\subseteq c \cdot \Sigma\ , \\ \mathrm{Prem}_2(B^nab) &= \{ab\}\ , \\ \mathrm{Prem}_2(aB^nab) &= \{aa\} \end{aligned}$$

et ces trois ensembles sont bien disjoints deux à deux.

(b) $S \Rightarrow_{\mathrm{lm}} bAb \Rightarrow^n_{\mathrm{lm}} bc^nAB^nb$ où $\mathrm{Prem}_2(B^nb) = \{b\}$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Prem}_2(cABB^nb) &\subseteq c \cdot \Sigma\ , \\ \mathrm{Prem}_2(B^nb) &= \{b\}\ , \\ \mathrm{Prem}_2(aB^nb) &= \{ab\} \end{aligned}$$

et ces trois ensembles sont bien disjoints deux à deux.

On a bien vérifié que la grammaire était LL(2).

[2] 2. Montrer que la grammaire précédente n'est fortement LL(k) pour aucun k.

On peut procéder ici soit en utilisant la définition des grammaires fortement LL(k), soit en utilisant la caractérisation vue dans la question 1 de l'exercice 3 du TD 7. Comme cette dernière donne une preuve plus simple (inutile de calculer les

$\mathrm{Suiv}_k(A)$ pour tous k), rappelons-la : une grammaire $\mathcal{G} = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ est fortement LL(k) si et seulement si, pour tout A dans N, toutes paires de productions $A \to \alpha_1, A \to \alpha_2$ dans P, s'il existe deux dérivations gauches

$$S \Rightarrow^*_{\mathrm{lm}} u_1 A \delta_1 \Rightarrow_{\mathrm{lm}} u_1 \alpha_1 \delta_1 \;, \qquad\qquad S \Rightarrow^*_{\mathrm{lm}} u_2 A \delta_2 \Rightarrow_{\mathrm{lm}} u_2 \alpha_2 \delta_2 \;,$$

telles que $k : \alpha_1\delta_1 = k : \alpha_2\delta_2$, alors $\alpha_1 = \alpha_2$.
Considérons donc les deux dérivations gauches

$$S \Rightarrow_{\mathrm{lm}} aAab \Rightarrow_{\mathrm{lm}} aab \;, \qquad\qquad S \Rightarrow_{\mathrm{lm}} bAb \Rightarrow_{\mathrm{lm}} bab \;.$$

On a bien $k : ab = k : ab$ pour tout k, mais les productions $A \to \varepsilon$ et $A \to a$ utilisées sont différentes et la grammaire n'est pas fortement LL(k).

[5] 3. Montrer que si une grammaire $\mathcal{G}$ est LL(k), alors on peut construire une grammaire fortement LL(k) $\mathcal{G}'$ équivalente, qui utilise des non-terminaux de la forme (A, F) où $F \subseteq \mathrm{Suiv}_k(A)$. *Indice : Les dérivations gauches de $\mathcal{G}'$ doivent être telles que, si $(S, \{\varepsilon\}) \Rightarrow^*_{\mathrm{lm},\mathcal{G}'} u(A, F)\delta$ pour $u \in \Sigma^*$ et $\delta \in (N \cup \Sigma)^*$, alors $F = \mathrm{Prem}_k(\delta)$; c'est à démontrer dans votre réponse.*

Personne n'a eu le temps d'aborder cette question. Je vous laisse y réfléchir.