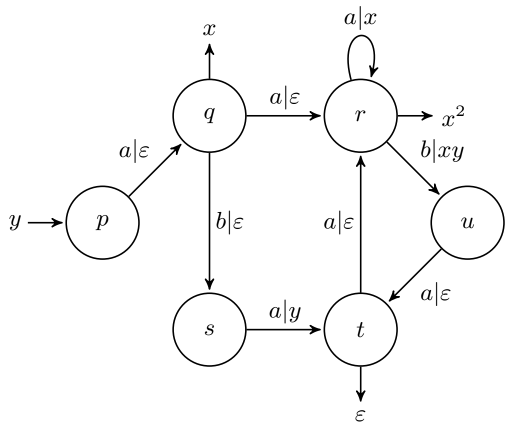
TD 14 : Fonctions séquentielles, encore^2

Exercice 1 (Minimisation)**.** On souhaite minimiser la fonction séquentielle $\{a,b\}^* \to \{x,y\}^*$ définie par l'automate suivant :



1. Calculer les préfixes minimaux $m_q = \bigwedge [\![A_q]\!](\{a,b\}^*)$ pour chaque état q de l'automate.
2. Donner l'automate normalisé équivalent.
3. Minimiser cet automate par raffinement de partitions.

Exercice 2 (Analyse lexicale)**.**

1. Construire une fonction séquentielle qui réalise l'analyse lexicale pour les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{id} &::= (a + \cdots + z)(a + \cdots + z + 0 + \cdots + 9)^* \\ \text{key} &::= if \end{aligned}$$

   et qui ignore l'expression :

$$\text{ws} ::= \_$$

   (On cherche donc une fonction de $\{0,1,2,\ldots,9,a,b,\ldots,z,\_\}^*$ dans $\{\text{id},\text{key}\}^*$).
2. Montrer que l'analyse lexicale pour les expressions suivantes n'est pas séquentielle :

$$\begin{aligned} A &::= a \\ B &::= a^*b \end{aligned}$$

Exercice 3 (Logique temporelle linéaire)**.** Soit AP un ensemble dénombrable de propositions atomiques ; on peut se restreindre en pratique à un ensemble fini. Une formule de la *logique temporelle linéaire* (LTL) est construite par la syntaxe suivante, où $p \in \mathsf{AP}$:

$$\varphi ::= \top \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \mathsf{X}\,\varphi \mid \varphi\,\mathsf{U}\,\varphi$$

Soit $\Sigma = 2^{\mathsf{AP}}$. Un mot w de Σ^+ est un *modèle* d'une formule φ à une position $0 \leq i < |w|$, noté $w, i \models \varphi$, dans les cas suivants :

$w, i \models \top$	toujours
$w, i \models p$	ssi $p \in w[i]$
$w, i \models \neg\varphi$	ssi $w, i \not\models \varphi$
$w, i \models \varphi \wedge \psi$	ssi $w, i \models \varphi$ et $w, i \models \psi$
$w, i \models \mathsf{X}\,\varphi$	ssi $i + 1 < |w|$ et $w, i + 1 \models \varphi$
$w, i \models \varphi\,\mathsf{U}\,\psi$	ssi $\exists i \leq j < |w| \,.\, w, j \models \psi$ et $\forall i \leq k < j \,.\, w, k \models \varphi$

On définit aussi les opérateurs $\mathsf{F}\,\varphi = \top\,\mathsf{U}\,\varphi$ et $\mathsf{G}\,\varphi = \neg(\mathsf{F}\,\neg\varphi)$.

L'*ensemble de satisfaction* d'une formule φ sur un mot w de Σ^+ est le mot $[\![\varphi]\!]_w$ de $\{0,1\}^{|w|}$ tel que $[\![\varphi]\!]_w[i] = 1$ ssi $w, i \models \varphi$ pour tout $0 \leq i < |w|$. La *fonction de satisfaction* est la fonction $[\![\varphi]\!]$ de domaine Σ^+ qui associe $[\![\varphi]\!]_w$ à w. Le *langage* $L(\varphi)$ d'une formule φ est l'ensemble des mots satisfaits à l'origine, c-à-d. $L(\varphi) = \{w \in \Sigma^+ \mid w, 0 \models \varphi\}$.

1. Soit $\mathsf{AP} = \{p\}$, et donc $\Sigma = \{a, b\}$ pour $a = \emptyset$ et $b = \{p\}$. Donner une formule LTL φ telle que $L(\varphi) = (ab)^+$.
2. Montrer que, pour toute formule LTL φ, il existe une formule $\mathrm{ST}_x(\varphi)$ de $\mathrm{FO}(\Sigma, <)$ avec une variable libre x, appelée sa *traduction standard*, telle que $w, i \models \varphi$ ssi $w, x \mapsto i \models \mathrm{ST}_x(\varphi)$.
3. Soit $\mathsf{AP} = \{p\}$. Montrer que $[\![\mathsf{F}\,p]\!]$ est co-séquentielle, mais pas séquentielle.
4. Soit φ une formule LTL. Montrer que $[\![\varphi]\!]$ est co-séquentielle. Quelle est la taille de l'automate représentant cette fonction ? En déduire une borne supérieure pour la complexité du problème de satisfiabilité des formules LTL.