TD 12 : Fonctions séquentielles

Exercice 1 (Machine de Moore)**.** Une *machine de* Moore de A dans B est un tuple $\mathcal{M} = \langle Q, A, B, \delta, \gamma, q_0 \rangle$ où Q est un ensemble fini d'états, $q_0 \in Q$ un état initial, A un alphabet d'entrée, B un alphabet de sortie, δ une fonction partielle de transition de $Q \times A$ dans Q, et γ une fonction de sortie de Q dans B^*. La fonction partielle $[\![\mathcal{M}]\!] : A^* \to B^*$ définie par $\mathcal{M}$ retourne la séquence des sorties associées à un calcul dans $\mathcal{M}$.

1. Montrer que si $\mathcal{M}$ est une machine de Moore, alors on peut donner une fonction séquentielle équivalente.
2. Montrer que si $\mathcal{A}$ est une fonction séquentielle (pure, ou machine de Mealy), alors on peut donner une machine de Moore équivalente.

Exercice 2 (Fonction non séquentielle)**.** Soit $B = \{0, 1\}$; montrer que la fonction $\cdot^2 : B^* \to B^*$ qui à un entier codé en binaire associe le codage de son carré n'est ni séquentielle ni co-séquentielle, c-à-d. séquentielle si on procède de droite à gauche.

Exercice 3 (Normalisation)**.** Soient $k > 1$ et $h \geq k$ deux bases entières ; on note $K = \{0, \ldots, k-1\}$ et $H = \{0, \ldots, h-1\}$ les alphabets d'écriture correspondants. On fait correspondre à un mot $u = a_n \cdots a_0$ de H^* écrit en base k une *valeur* $\mathsf{val}_k(u)$ définie comme

$$\mathsf{val}_k(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i k^i \ .$$

La fonction de *normalisation* $\nu_{h,k}$ de $(H \setminus \{0\})H^*$ dans $(K \setminus \{0\})K^*$ préserve les valeurs en base k :

$$\mathsf{val}_k(\nu_{h,k}(u)) = \mathsf{val}_k(u) \ .$$

Par exemple pour $h = 4$ et $u = 333$, $\mathsf{val}_2(u) = 21$, $\nu_{4,2}(u) = 10101$.

1. Donner une fonction co-séquentielle pour $\nu_{4,2}$, (cela revient aussi dans notre cas à mettre le chiffre de poids faible en premier).
2. Montrer que $\nu_{h,k}$ est en général co-séquentielle.
3. En déduire que l'addition de deux nombres en base k et que la multiplication par une constante $c \geq 0$ sont co-séquentielles.
4. Appliquer cette construction à l'addition en base 2.

Exercice 4 (Addition d'Avizienis)**.** Soit encore $k > 1$. Un système d'Avizienis est un procédé de numération en base k qui utilise des chiffres positifs et négatifs. On associe comme dans l'exercice précédent à un mot $u = a_n \cdots a_0$ sa valeur $\mathsf{val}_k(u)$, à la différence près que les chiffres a_i peuvent être négatifs (on notera dans ce cas $\overline{a}$ plutôt que $-a$), par exemple $\mathsf{val}_2(10\overline{1}) = 3$ et $\mathsf{val}_{10}(3\overline{3}) = 27$.

Soit $h = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ et $H = \{0, \dots, h\}$ et $\bar{H} = \{\bar{h}, \dots, \bar{1}\}$. Le système d'Avizienis correspond aux mots de $X = (H \setminus \{0\} \cup \bar{H})(H \cup \bar{H})^*$. Dans ce système, la représentation n'est pas unique : par exemple $\mathsf{val}_4(12\overline{2}) = \mathsf{val}_4(112) = 22$.

1. On appelle à nouveau *normalisation* la fonction de X dans $(K \setminus \{0\})K^*$ qui préserve les valeurs. Montrer que cette normalisation est elle aussi co-séquentielle.
2. Montrer qu'il existe une fonction séquentielle $f : K^* \to X$ qui préserve les valeurs.
3. On considère maintenant l'alphabet $H' = \{-2h, \dots, 0, \dots, 2h\}$. Montrer qu'il existe une fonction séquentielle $g : H'^* \to X$ qui préserve les valeurs. Comment l'utiliser pour réaliser l'addition de manière séquentielle ?