Notes de révision : Automates et langages

Benjamin MONMEGE et Sylvain SCHMITZ
LSV, ENS Cachan & CNRS
Version du 17 septembre 2014 (r78M)

Automates et langages

Ces notes de révisions sont destinées aux candidats à l'agrégation de mathématiques qui ont choisi l'option D d'informatique à l'oral. Les notes couvrent (pour l'instant) l'essentiel du programme de l'option en matière d'automates et de langages rationnels, et seront complétées un jour... Certaines thématiques largement hors programme sont également abordées : elles sont signalées par le symbole ici reproduit en marge.

Les notes de révision ne se substituent pas à la lecture des ouvrages classiques sur le sujet, mais offrent des renvois à ces ouvrages et les complètent avec des exemples et des applications plus variées. En particulier, on ne trouvera pas en ces pages une seule démonstration complète, mais seulement des justifications rapides, qui sont à proscrire lors d'un développement oral.

Programme officiel

Le programme comporte d'après le document du site de l'agrégation `http://agreg.org/` :

1. Automates finis. Langages reconnaissables. Lemme d'itération. Existence de langages non reconnaissables. Automates complets. Automates déterministes. Algorithme de déterminisation. Propriétés de clôture des langages reconnaissables.
2. Expressions rationnelles. Langages rationnels. Théorème de KLEENE.
3. Automate minimal. Résiduel d'un langage par un mot. Algorithme de minimisation.
4. Utilisation des automates finis : recherche de motifs, analyse lexicale.
5. Langages algébriques. Lemme d'OGDEN. Existence de langages non algébriques. Grammaires algébriques. Propriétés de clôture des langages algébriques.
6. Automates à pile. Langages reconnaissables par automates à pile.
7. Utilisation des automates à pile : analyse syntaxique. Grammaires LL(1).

Les leçons correspondantes sont :

Leçon 907 Algorithmique du texte : exemples et applications.

Leçon 909 Langages rationnels. Exemples et applications.

Leçon 910 Langages algébriques. Exemples et applications.

Leçon 923 Analyses lexicale et syntaxique : applications.

Si le programme de l'option D porte globalement sur l'informatique fondamentale, on notera tout de même l'insistance des jurys à demander des exemples et applications pour les résultats assez théoriques du thème. C'est que ces résultats, souvent sous la forme de preuves *constructives*, ne se réduisent pas à des théorèmes sur des objets mathématiques, mais sont réellement appliqués dans de nombreux domaines. Deux questions sont à se poser systématiquement face à un résultat théorique en informatique :

1. *« À quoi cela sert-il ? »*, quelles sont les applications de ce résultat ?
2. *« Quel est le coût ? »*, quelle est la complexité théorique de cette construction ?

Bibliographie recommandée

Tout n'est pas forcément disponible dans toutes les bibliothèques universitaires, mais au moins une partie de ces ouvrages font partie de la bibliothèque de l'agrégation, et sont donc disponibles pendant les trois heures de préparation des candidats. Des renvois vers ces ouvrages sont systématiques dans les notes de révision.

Il est peut-être utile de rappeler que les seuls documents autorisés lors de la préparation de l'oral sont des *livres* largement diffusés, de manière à préserver l'égalité des chances entre les candidats. En particulier, ces notes de révision ne peuvent pas être utilisées lors de la préparation elle-même, mais ont vocation à l'être en amont lors du travail de révision à proprement parler.

[ASU86] Alfred AHO, Ravi SETHI et Jeffrey ULLMAN. *Compilateurs : Principes, techniques et outils*. Dunod, 2000. Traduit de *Compilers*, Addison Wesley, 1986.

[Aut94] Jean-Michel AUTEBERT. *Théorie des langages et des automates*. Masson, 1994.

[Car08] Olivier CARTON. *Langages formels, calculabilité et complexité*. Vuibert, 2008.

[GBJL00] Dick GRUNE, Henri E. BALS, Ceriel J.H. JACOBS et Koen G. LANGENDOEN. *Compilateurs*. Dunod, 2002. Traduit de *Modern Compiler Design*, John Wiley & Sons, 2000.

[Har78] Michael A. HARRISON. *Introduction to Formal Language Theory*. Addison Wesley, 1978.

[HU79] John E. HOPCROFT et Jeffrey D. ULLMAN. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. Addison Wesley, 1979.

[Sak03] Jacques SAKAROVITCH. *Éléments de théorie des automates*. Vuibert, 2003.

[SSS88] Seppo SIPPU et Eljas SOISALON-SOININEN. *Parsing Theory*, Vol. I: *Languages and Parsing*. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science volume 15, Springer, 1988.

[SSS90] Seppo SIPPU et Eljas SOISALON-SOININEN. *Parsing Theory*, Vol. II: *LR(k) and LL(k) Parsing*. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science volume 20, Springer, 1990.

Contenu des notes de révision

Chapitre 1

Automates et langages rationnels

Le programme de l'agrégation pour les automates et langages rationnels tourne essentiellement autour du théorème de KLEENE :

Théorème 1.1 (KLEENE [1956])**.** *Soit Σ un alphabet fini. Un langage de Σ^* est rationnel si et seulement si il est reconnu par un automate fini sur Σ :*

$$Rat(\Sigma^*) = Rec(\Sigma^*)$$

C.f. [Car08, p. 36], [Sak03, p. 94], [Aut94, p. 52], [SSS88, p. 82], [HU79, p. 30], [Har78, p. 57]. Le théorème n'est pas vérifié pour tout monoïde [Sak03, p. 261].

On s'attachera donc particulièrement à connaître les preuves des deux inclusions

- $\mathbf{Rat}(\Sigma^*) \subseteq \mathbf{Rec}(\Sigma^*)$ par la construction de THOMPSON, celle de GLUSHKOV, ou celle d'ANTIMIROV (sous-section 1.2.1),
- $\mathbf{Rec}(\Sigma^*) \subseteq \mathbf{Rat}(\Sigma^*)$ par la construction de MCNAUGHTON et YAMADA, ou celle de BRZOZOWSKI et MCCLUSKEY, ou par résolution d'un système d'équations et le lemme d'ARDEN (sous-section 1.2.2).

Il n'est pas nécessaire de maîtriser toutes ces constructions, mais il faut en connaître une dans chaque direction du théorème !

Au résultat central qu'est le théorème de KLEENE s'ajoutent des résultats périphériques de

1. clôture par diverses opérations (sous-section 1.1.3),
2. lemmes d'itération (sous-section 1.1.4), et
3. minimisation (section 1.3).

Ces résultats sont à connaître puisqu'ils sont au programme et sont donc susceptibles de faire l'objet de questions à l'oral. L'introduction d'un ou plusieurs de ces points dans un plan d'une leçon **909** est utile, en veillant à ne pas oublier pour autant les exemples et applications.

1.1 Langages reconnaissables

Définition 1.2 (Automate fini)**.** Un *automate fini* sur un alphabet Σ est un tuple $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \delta \rangle$ où Q est un ensemble fini d'états, $I \subseteq Q$ l'ensemble des états initiaux, $F \subseteq Q$ l'ensemble des états finals, et $\delta \subseteq Q \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \times Q$ la relation de transition. Alternativement, on peut voir δ comme une fonction de $Q \times \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ dans 2^Q l'ensemble des parties de Q.

On étend naturellement la définition de δ sur $Q \times \Sigma^* \times Q$ par $\delta^*(q, \varepsilon) = q$ et $\delta^*(q, aw) = \bigcup_{q' \in \delta(q,a)} \delta(q', w)$. Par un abus de notation bien pratique, on peut aussi

C.f. [Car08, sec. 1.5.2][Sak03, sec. I.1], [Aut94, ch. 4], [SSS88, sec. 3.2], [HU79, sec. 2.2–2.4], [Har78, ch. 2].

l'étendre à des ensembles d'états ou de mots par l'union $\delta^*(E, L) = \bigcup_{q\in E, u\in L} \delta^*(q, u)$. Enfin, on peut définir similairement la relation inverse $\delta^{-1} = \{(q, a, p) \mid (p, a, q) \in \delta\}$.

Définition 1.3 (Langage reconnaissable)**.** Le langage reconnu par un automate $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \delta\rangle$ est

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists i \in I, f \in F, f \in \delta^*(i, w)\}$$

Deux automates finis sur Σ sont *équivalents* s'ils reconnaissent le même langage de Σ^*.

L'autre définition de Rec(Σ^*) utilise la notion de reconnaissance par monoïde : nous l'étudierons plus en détail dans la section 1.3.5

Un langage L sur Σ^* est *reconnaissable* s'il existe un automate fini sur Σ tel que $L = L(\mathcal{A})$. L'ensemble des langages reconnaissables sur Σ^* est noté Rec(Σ^*).

1.1.1 Propriétés élémentaires

On rappelle ici quelques propriétés élémentaires sur les automates.

Définition 1.4 (Automate accessible)**.** L'ensemble des états accessibles d'un automate fini est $\delta^*(I, \Sigma^*)$. Un automate fini est *accessible* si tous ses états sont accessibles, c'est-à-dire si, pour tout état q de Q, il existe un mot u de Σ^* et un état initial i de I tels que $q \in \delta^*(i, u)$.

Proposition 1.5. *Pour tout automate fini sur Σ, il existe un automate fini accessible équivalent.*

Démonstration. Étant donné un automate fini $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \delta\rangle$, on définit l'automate $\mathcal{A}' = \langle \Sigma, Q', I, F, \delta'\rangle$ avec

$$\begin{aligned} Q' &= \delta^*(I, \Sigma^*) \\ \delta' &= \delta \cap (Q' \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \times Q') \end{aligned}$$ □

Un calcul d'accessibilité dans un automate se réduit à un calcul d'accessibilité dans un graphe orienté, qui n'est lui-même qu'un calcul de l'image d'un ensemble par la fermeture réflexive transitive de la relation R d'adjacence du graphe. En pratique, on utilise pour ce type de problème soit un simple parcours en profondeur depuis les états initiaux en $O(|Q| + |\delta|)$, soit des algorithmes plus avancés utilisant les composantes fortement connexes du graphe (algorithme de TARJAN [1972] en $O(t \cdot \max(|S|, |R|))$ où S est l'ensemble des sommets du graphe, R la relation d'adjacence, et t le coût algorithmique d'une opération d'union entre deux parties de S, ce que l'on tend à approximer par $O(|\mathcal{A}|)$ en posant $|\mathcal{A}| = \max(|Q|, |\delta|)$).

C.f. [SSS88, ch. 2], [Sak03, exercice I.1.20]. On rappelle aussi que le problème de l'accessibilité dans un graphe orienté, c'est-à-dire de déterminer pour deux sommets quelconques p et q s'il existe un chemin orienté qui relie p à q, est l'exemple classique avec 2SAT d'un problème NLOGSPACE*-complet [Car08, théorème 4.46], [HU79, sec. 13.5], [*PAPADIMITRIOU*, 1993, ch. 16].*

On définit de manière similaire un automate *co-accessible* comme un automate où tout état peut accéder à au moins un état final. On observe aisément qu'il suffit de vérifier l'accessibilité de l'automate *transposé* qui échange I et F et utilise δ^{-1} comme relation de transition, et donc que pour tout automate fini on peut construire un automate co-accessible équivalent. En combinant accessibilité et co-accessibilité, on définit les automates émondés.

Définition 1.6 (Automate émondé)**.** Un automate fini est *émondé* s'il est accessible et co-accessible.

Théorème 1.7 (Vide)**.** *On peut décider si un langage reconnaissable est vide en temps polynomial.*

Démonstration. Soit $L = L(\mathcal{A})$ un langage reconnaissable. L est l'ensemble vide si et seulement si l'automate émondé de $\mathcal{A}$ a un ensemble vide d'états. □

Une autre construction qui utilise les résultats de complexité sur les graphes permet d'éliminer les ε-transitions, ce que l'on supposera ensuite chaque fois que cela sera utile.

À l'inverse, l'universalité d'une expression rationnelle (et donc d'un automate non déterministe) est un problème PSPACE*-complet (*STOCKMEYER *et* MEYER *[1973], [SSS90, p. 392]).*

Proposition 1.8. *Pour tout automate fini sur Σ, il existe un automate fini sans ε-transition équivalent.*

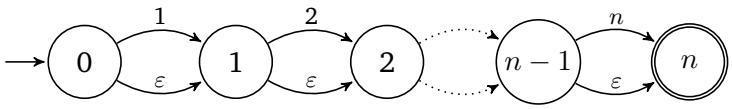
Démonstration. Étant donné un automate fini $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \delta \rangle$, on définit un automate $\mathcal{A}' = \langle \Sigma, Q, I, F', \delta' \rangle$ tel que

$$F' = \{q \in Q \mid \delta^*(q, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset\}$$
$$\delta' = \{(p, a, q) \mid \exists q' \in Q, \delta^*(p, \varepsilon, q') \wedge (q', a, q) \in \delta\}$$ □

En utilisant une construction inspirée par celle de GLUSHKOV*, on peut construire un automate fini sans ε-transitions de taille $O(n(\log n)^2)$ pour toute expression rationnelle de taille n, et donc pour l'expression $(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)\cdots(n+\varepsilon)$ correspondant à l'automate de l'exemple 1.9 [*HROMKOVIČ *et al., 1997].*

Comme précédemment, on peut réduire ce calcul à celui de la clôture réflexive transitive d'une relation, ici $\{(p, q) \mid (p, \varepsilon, q) \in \delta\}$. La complexité de la construction est alors en $O(|Q|^2)$.

Exemple 1.9. On observe réellement cette complexité quadratique sur l'automate fini sur l'alphabet $\{1, \ldots, n\}$ suivant



1.1.2 Automates déterministes

Les définitions suivantes supposent des automates sans ε-transitions.

Définition 1.10 (Automate complet)**.** Un automate fini est *complet* si, pour tout état q de Q et pour tout symbole a de Σ, $\delta(q, a) \neq \emptyset$.

Proposition 1.11. *Pour tout automate fini sur Σ, il existe un automate fini complet équivalent.*

Démonstration. Étant donné un automate fini $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \delta \rangle$, on définit un automate $\mathcal{A}' = \langle \Sigma, Q \uplus \{p\}, I, F, \delta' \rangle$ avec

$$\delta' = \delta \cup \{(p, a, p) \mid a \in \Sigma\} \cup \{(q, a, p) \mid q \in Q, a \in \Sigma, \delta(q, a) = \emptyset\}$$ □

Le calcul d'un automate complet est manifestement en $O(|Q| \cdot |\Sigma|)$. L'état p est appelé un état *puit*.

On doit en fait la notion d'automates non déterministes et leur conversion en automates déterministes à RABIN *et* SCOTT *[1959].*

Définition 1.12 (Automate déterministe)**.** Un automate fini est *déterministe* si $|I| \leq 1$ et pour tout état q de Q et pour tout symbole a de Σ, $|\delta(q, a)| \leq 1$.

Proposition 1.13. *Pour tout automate fini sur Σ, il existe un automate fini déterministe équivalent.*

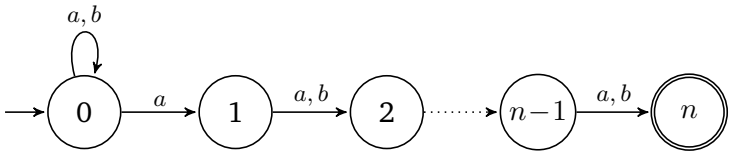
Démonstration. Étant donné un automate fini $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \delta \rangle$, on construit $\mathcal{A}' = \langle \Sigma, 2^Q, I, \{E \subseteq Q \mid E \cap F \neq \emptyset\}, \delta' \rangle$ avec

$$\delta' = \{(E, a, E') \mid E' = \delta^*(E, a)\}$$ □

Cette construction par la méthode des sous-ensembles (ou des parties) a un coût de $O(2^{|Q|})$ dans le pire des cas, et il existe des automates à n états dont le déterminisé complet a 2^n états.

Exemple 1.14. Un exemple classique d'explosion lors de la déterminisation est l'automate suivant, avec un passage de $n+1$ à 2^n+1 états.

C.f. [Car08, sec. 1.6], [Sak03, sec. I.3.2], [Aut94, p. 45], [SSS88, sec. 3.4], [HU79, théorème 3.2]. Voir en particulier [Sak03, exercice I.3.6] pour plusieurs exemples d'explosion lors de la déterminisation, dont un exemple qui atteint la borne.



Démonstration. On montre par récurrence sur $k = |P|$ pour toute partie P de $\{1,\dots,n\}$ que l'état $\{0\} \cup P$ est accessible dans le déterminisé. La propriété est vraie pour $k = 0$ puisque $\{0\}$ est l'état initial du déterminisé.

Soit P un sous-ensemble de $\{1,\dots,n\}$ de cardinal $k+1$. On définit l'ensemble

$$P-1 = \{i-1 \mid i \neq 1 \in P\}$$

Si P contient 1, alors soit $P-1$ est de cardinal k et $\{0\} \cup P-1$ est accessible par hypothèse de récurrence ; on a bien $\delta'(\{0\} \cup P-1, a) = \{0\} \cup P$ donc P est accessible.

Si P ne contient pas 1, alors on procède par récurrence sur j la plus petite valeur dans P. Pour $j = 2$, $P-1$ est de cardinal $k+1$ et contient 1, donc est accessible au vu du cas précédent, et $\delta'(\{0\} \cup P-1, b) = \{0\} \cup P$. Puis, pour une plus petite valeur $j+1$ de P, $P-1$ a pour plus petite valeur j donc est accessible par hypothèse de récurrence, et $\delta'(\{0\} \cup P-1, b) = \{0\} \cup P$. □

Malgré son coût potentiellement explosif, la déterminisation sert avant tout à améliorer la complexité des problèmes sur les automates ! Pour peu que l'automate déterministe reste de taille raisonnable, on bénéficie alors de complexités polynomiales pour les problèmes d'équivalence et d'inclusion de langages, et linéaire pour le problème d'appartenance.

C.f. [SSS88, pp. 92–95].

Théorème 1.15 (Appartenance)**.** *Soit w un mot de Σ^* et $\mathcal{A}$ un automate fini sur Σ.*

1. *L'appartenance de w à $L(\mathcal{A})$ est décidable en temps déterministe $O(|\mathcal{A}| \cdot |w|)$ et en espace $O(|\mathcal{A}|)$.*
2. *Si $\mathcal{A}$ est déterministe, alors l'appartenance de w à $L(\mathcal{A})$ est décidable en temps déterministe $O(|\mathcal{A}| + |w|)$ et en espace $O(|\mathcal{A}|)$.*

Des complexités polynomiales pour les problèmes d'inclusion et d'équivalence peuvent aussi être obtenues en considérant des automates non ambigus *tout en diminuant les risques d'explosion [STEARNS et HUNT III, 1985]. L'automate non déterministe de l'exemple 1.14 était justement non ambigu.*

Démonstration. Soit $w = a_1 \cdots a_n$ et $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \delta \rangle$.

On démontre le point 1 à l'aide d'un algorithme qui calcule initialement les états accessibles par $S_0 := \delta^*(I, \varepsilon)$ en temps $O(|\mathcal{A}|)$ puis les ensembles $S_i := \delta^*(S_{i-1}, a_i)$ en temps $O(|\mathcal{A}|)$ pour i de 1 à n. Le mot w appartient à $L(\mathcal{A})$ si et seulement si $S_n \cap F \neq \emptyset$. On n'a besoin de conserver qu'un seul ensemble S_i à la fois dans ce calcul, donc on reste bien en espace $O(|\mathcal{A}|)$.

Pour le cas du point 2, on observe que l'algorithme précédent voit ses ensembles S_i réduits à des singletons calculables en temps $O(1)$. La complexité doit de plus tenir compte du temps et de l'espace pris par le chargement de $\mathcal{A}$. □

1.1.3 Propriétés de clôture

C.f. [Car08, sec. 1.8], [Aut94, pp. 43–48], [HU79, sec. 3.2], [Har78, sec. 2.3].

Les langages reconnaissables sont clos par union, concaténation et étoile de KLEENE comme nous le verrons dans le cadre de la construction de THOMPSON en sous-section 1.2.1. Cette section est plutôt l'occasion de parler d'une autre propriété de clôture, par *relation rationnelle* ou *transduction rationnelle*, qui généralise plusieurs autres propriétés de clôture.

C.f. [Sak03, sec. IV.1], [BERSTEL, 1979, ch. III]. L'article fondateur en la matière est dû à ELGOT et MEZEI [1965].

Sa démonstration est souvent donnée en décomposant la transduction en morphisme, morphisme inverse et intersection et en utilisant les preuves de clôture par ces opérations. Nous prenons ici le cheminement inverse et nous déduirons les clôtures par morphisme, morphisme inverse et intersection de celle par transduction.

Le principal avantage de cette introduction des transducteurs dans une leçon est qu'ils donnent lieu à de nombreuses applications : au lieu de simplement définir un langage, un transducteur définit une relation ou une fonction, et permet donc de calculer effectivement.

Définition 1.16 (Transducteur)**.** Un *transducteur* sur $\Sigma \times \Delta$ est un automate fini sur $\Sigma^* \times \Delta^*$. Un transducteur est sous *forme normale* si sa relation de transition est incluse dans $Q \times (\Sigma \times \{\varepsilon\} \cup \{\varepsilon\} \times \Delta) \times Q$. La *transduction rationnelle* sur $\Sigma^* \times \Delta^*$ définie par $\mathcal{T}$ est

$$R(\mathcal{T}) = \{(u, v) \in \Sigma^* \times \Delta^* \mid \delta^*(I, (u, v)) \cap F \neq \emptyset\}$$

C.f. [Sak03, corollaire IV.1.3], [HU79, théorème 11.1], [Har78, théorème 6.4.3].

Proposition 1.17 (Clôture par transduction)**.** *L'ensemble des langages reconnaissables est clos par transduction rationnelle.*

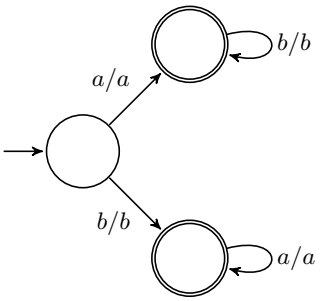
Démonstration. Soient $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \delta \rangle$ un automate fini sur Σ et $\mathcal{T} = \langle \Sigma \times \Delta, Q', I', F', \delta' \rangle$ un transducteur sur $\Sigma \times \Delta$. On construit un automate fini $\mathcal{A}' = \langle \Delta, Q \times Q', I \times I', F \times F', \delta'' \rangle$ sur Δ tel que $R(\mathcal{T})(L(\mathcal{A})) = L(\mathcal{A}')$. Sans perte de généralité, on suppose $\mathcal{A}$ sans ε-transition et $\mathcal{T}$ sous forme normale. On définit alors avec a dans $\Delta \cup \{\varepsilon\}$ et b dans Δ :

$$\begin{aligned}\delta'' = &\{((q_1, q_2), \varepsilon, (q_1', q_2')) \mid \exists a \in \Sigma, (q_1, a, q_1') \in \delta \wedge (q_2, (a, \varepsilon), q_2') \in \delta'\} \\ &\cup \{((q_1, q_2), b, (q_1, q_2')) \mid (q_2, (\varepsilon, b), q_2') \in \delta'\}\end{aligned}$$

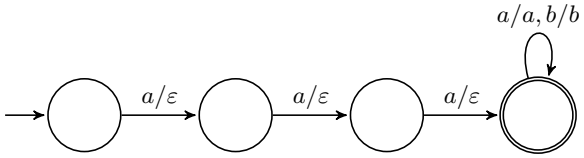
□

Cette construction est essentiellement un raffinement du calcul de l'intersection de deux automates à états finis. La complexité de ce produit synchrone est en $O(|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{A}'|)$ dans le pire des cas. Grâce à cette construction similaire à celle de l'intersection de deux automates finis, on obtient les propriétés de fermeture suivantes :

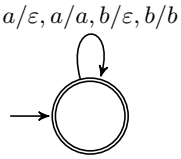
intersection de deux langages reconnaissables L_1 et L_2 sur Σ : en appliquant le transducteur $L_2 \times L_2$ à L_1. Par exemple, le transducteur suivant calcule le résultat de l'intersection avec le langage sur $\{a, b\}^*$ $\{ab^n \mid n \geq 0\} \cup \{ba^m \mid m \geq 0\}$:



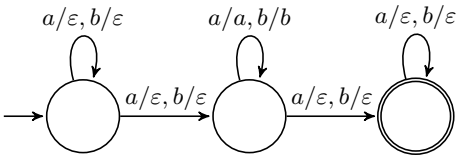
quotient gauche de L par un mot u de Σ^* : le transducteur reconnaît (u, ε) puis l'identité sur Σ^*. Par exemple, pour le quotient par $u = aaa$ sur l'alphabet $\{a, b\}$:



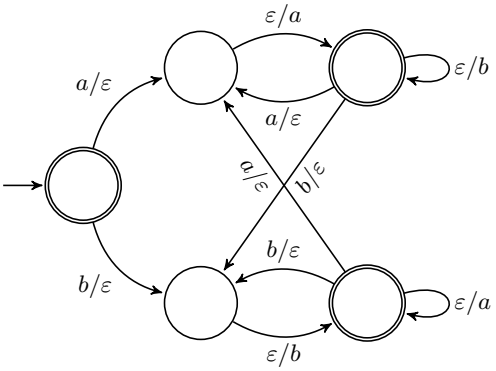
sous-mot : le transducteur choisit non déterministiquement entre recopier (identité) et effacer ses symboles d'entrée ($\Sigma^* \times \varepsilon$). Par exemple, sur $\{a, b\}$:



facteur (et similairement préfixe ou suffixe) : le transducteur est initialement dans un état d'effacement des symboles, choisit non déterministiquement de passer en mode copie, puis non déterministiquement de passer en mode d'effacement jusqu'à la fin. Par exemple, sur $\{a, b\}$:



substitution rationnelle σ de Σ^* dans $\mathrm{Rec}(\Delta^*)$: par le transducteur défini par $(\bigcup_{a\in\Sigma}\{a\} \times \sigma(a))^*$. Cela implique les clôtures par substitution inverse, morphisme et morphisme inverse. Par exemple, pour la substitution σ définie par $a \mapsto \{ab^n \mid n \geq 0\}$ et $b \mapsto \{ba^m \mid m \geq 0\}$:



On pourrait aussi exprimer les opérations d'union et de concaténation de langages reconnaissables, mais les constructions sont des adaptations de celles pour les automates finis et n'exploitent pas réellement les transducteurs.

Il nous reste à mentionner une opération de clôture importante : celle par complément.

Proposition 1.18 (Clôture par complément)**.** *L'ensemble des langages reconnaissables est clôt par complément.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \delta \rangle$ un automate déterministe complet. L'automate $\langle \Sigma, Q, I, Q \backslash F, \delta \rangle$ reconnaît $\overline{L(\mathcal{A})}$, le complémentaire de $L(\mathcal{A})$. □

On en déduit immédiatement la décidabilité de l'inclusion et de l'équivalence de deux langages reconnaissables :

Théorème 1.19 (Inclusion)**.** *Soient L_1 et L_2 deux langages reconnaissables. Décider si $L_1 \subseteq L_2$ est* PSPACE*-complet.*

C.f. [SSS88, théorème 3.46].

Démonstration. En effet, les calculs du complément et de l'intersection de deux langages reconnaissables sont effectifs, et

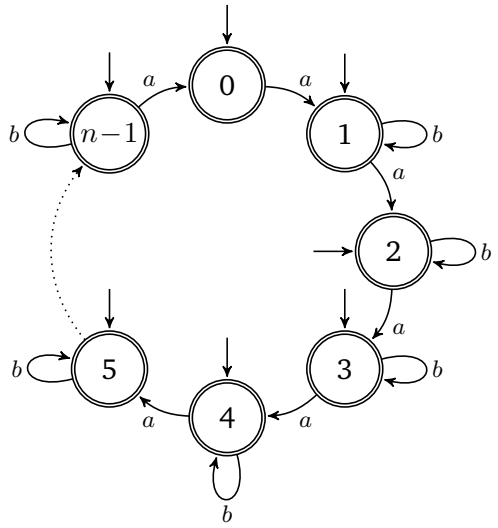
$$L_1 \subseteq L_2 \text{ ssi } L_1 \cap \overline{L_2} = \emptyset \ .$$

En composant « au vol » ces calculs avec un calcul du vide (qui est en espace logarithmique), cela fournit bien un algorithme en espace polynomial. La complétude pour PSPACE vient du problème de l'universalité : $\Sigma^* \subseteq L$ est déjà PSPACE-complet. □

On verra en section 1.3 une autre technique pour vérifier l'équivalence de deux automates déterministes : calculer l'automate minimal (qui est canonique) pour chacun et vérifier s'ils sont isomorphes.

La construction du complément d'un langage reconnu par un automate avec n états passe ici par le calcul d'un automate déterministe, avec une complexité en $O(2^n)$. On pourrait espérer trouver des automates non déterministes plus compacts pour le complémentaire d'un langage, mais cette borne supérieure est atteinte, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.20. On considère l'automate $\mathcal{A}_n = \langle \{a, b\}, Q, Q, Q, \delta \rangle$ avec l'ensemble d'états $Q = \{0, \ldots, n-1\}$ et les transitions $\delta(i, a) = i + 1 \bmod n$ pour tout i de Q, et $\delta(i, b) = i$ si $i \neq 0$. Tout automate reconnaissant $\overline{L(\mathcal{A}_n)}$ possède au moins 2^n états.



Exemple adapté de YAN *[2008].*

Démonstration. On peut déjà noter que la déterminisation de cet automate produit un automate avec 2^n états. Mais on cherche ici à montrer que même un automate *non déterministe* pour le langage $\overline{L(\mathcal{A}_n)}$ doit être de taille exponentielle.

Soit K un sous-ensemble de Q ; il existe 2^n ensembles K différents. On définit $w_K = x_0 \cdots x_{n-1}$ avec pour tout i de Q $x_i = a^i b a^{n-i}$ si $i \in K$ et $x_i = a^n$ sinon.

On observe que le mot $w_K w_{Q\setminus K}$ n'est pas un mot de $L(\mathcal{A}_n)$: pour chaque i de Q, un facteur $a^i b a^{n-i}$ apparaît dans $w_K w_{Q\setminus K}$, et donc quel que soit le choix de l'état initial pour reconnaître le mot, on devra tenter de lire un b dans l'état 0.

En revanche, si $K \neq K'$, sans perte de généralité on peut supposer $K' \not\subseteq K$ et alors le mot $w_K w_{Q\setminus K'}$ est dans $L(\mathcal{A}_n)$: il existe alors un état i tel que $i \notin K$ et $i \notin Q\setminus K'$, et il suffit de faire démarrer la reconnaissance de $w_K w_{Q\setminus K'}$ dans l'état $n-i$.

Dès lors, pour chacun des 2^n ensembles K, les ensembles d'états atteints en lisant w_K dans un automate pour $\overline{L(\mathcal{A}_n)}$ doivent être disjoints, sous peine de permettre la reconnaissance d'un mot $w_K w_{Q\setminus K'}$ dans $L(\mathcal{A}_n)$. □

1.1.4 Lemmes d'itération

C.f. [Car08, sec. 1.9], [Sak03, pp. 77–80], [Aut94, p. 54], [HU79, sec. 3.1], [Har78, théorème 2.2.2].

Les lemmes d'itération et les propriétés de clôture permettent de démontrer que certains langages ne sont pas reconnaissables. Il est en général plus simple de procéder par clôtures successives jusqu'à un langage manifestement non reconnaissable, comme $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, sur lequel il est aisé d'appliquer un lemme d'itération.

Lemme 1.21 (Lemme de l'étoile)**.** *Si L est un langage reconnaissable de Σ^*, alors il existe un entier n tel que*

1. *pour tout mot w de L avec $|w| \geq n$, il existe une factorisation $w = u_1u_2u_3$ avec u_2 non vide, telle que $u_1u_2^*u_3 \subseteq L$,*
2. *pour tout mot w de L et pour toute factorisation de $w = v_1v_2v_3$ avec $|v_2| \geq n$, il existe une factorisation $v_2 = u_1u_2u_3$ avec u_2 non vide, telle que $v_1u_1u_2^*u_3v_3 \subseteq L$,*
3. *pour tout mot w de L et pour toute factorisation $w = u_0u_1\cdots u_nu_{n+1}$ avec u_i non vide pour i de 1 à n, il existe deux positions $0 \leq j < k \leq n$ telles que $u_0u_1\cdots u_j(u_{j+1}\cdots u_k)^*u_{k+1}\cdots u_nu_{n+1} \subseteq L$.*

Démonstration. On démontre le troisième cas, les deux autres en sont déductibles. Soit L un langage reconnaissable, et $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \delta\rangle$ un automate fini pour L. On pose $n = |Q|$ le nombre d'états de $\mathcal{A}$, et pour tout mot de L admettant une factorisation $w = u_0u_1\cdots u_nu_{n+1}$ avec u_i non vide pour i de 1 à n, on appelle q_i pour i de 0 à n l'état atteint après avoir lu $u_0u_1\cdots u_i$ lors de la reconnaissance de w. Parmi ces $n+1$ états q_i, il en existe au moins deux, q_j et q_k avec $0 \leq j < k \leq n$ tels que $q_j = q_k$. Mais alors $u_0u_1\cdots u_j(u_{j+1}\cdots u_k)^*u_{k+1}\cdots u_nu_{n+1} \subseteq L$. □

Les exemples et les exercices sur le lemme d'itération abondent dans les livres sur les langages formels. Voici deux exemples plus originaux.

Exemple 1.22. Soit L un langage *quelconque* sur Σ^*, et $\#$ un symbole qui n'est pas dans Σ. Alors le langage

$$L_\# = (\#^+L) \cup \Sigma^*$$

satisfait les conditions de la première version du lemme de l'étoile.

En effet, on pose $n = 1$ et pour tout mot w de $\#^+L$ on peut choisir une factorisation avec $u_1 = \varepsilon$ et $u_2 = \#$, et pour tout i $u_1u_2^iu_3 = \#^iu_3$ sera bien dans $L_\#$. Pour tout mot de Σ^*, le lemme est bien vérifié puisque Σ^* est reconnaissable.

Pourtant $L = \mu(L_\# \cap \#^+\Sigma^*)$ pour le morphisme μ défini par $a \mapsto a$ pour tout a de Σ et par $\# \mapsto \varepsilon$, et donc si L n'est pas reconnaissable, alors $L_\#$ ne l'est pas non plus.

Enfin, si L ne satisfait pas les conditions de la seconde version du lemme de l'étoile, alors $L_\#$ ne les satisfait pas non plus : il suffit d'utiliser le même facteur que pour L.

Les exemples 1.22 et 1.23 sont adaptés de YU *[1997].*

Exemple 1.23. Soit L un langage *quelconque* sur Σ^* et $\$$ un symbole qui n'est pas dans Σ. On définit

$$L_1 = \{\$^+a_1\$^+a_2\$^+\cdots\$^+a_n\$^+ \mid n \geq 0, \forall i\ a_i \in \Sigma, \text{ et } w = a_1\cdots a_n \in L\}$$
$$L_2 = \{\$^+v_1\$^+v_2\$^+\cdots\$^+v_n\$^+ \mid n \geq 0, \forall i\ v_i \in \Sigma^*, \text{ et } \exists j\ |v_j| \geq 2\}$$
$$L_\$ = L_1 \cup L_2$$

Le langage $L_\$$ satisfait les conditions de la deuxième version du lemme de l'étoile.

En effet, on pose $n = 3$ et on considère un mot xyz de $L_\$$ avec $|y| \geq 3$. Si $\$$ apparaît dans y, alors on peut choisir une décomposition $y = u_1\$u_3$ qui vérifie bien le lemme. Si $\$$ n'apparaît pas dans y, alors xyz est dans L_2, et on peut choisir un symbole a de Σ comme facteur itérant : si on l'efface, on aura encore au moins deux symboles consécutifs de Σ et on restera donc dans L_2, et si on l'itère on reste clairement dans L_2.

Pourtant, comme dans l'exemple 1.22, on vérifie que $L = \mu(L_\$ \cap (\$^+\Sigma)^*\$^+)$ pour le morphisme μ défini par $a \mapsto a$ pour tout a de Σ et par $\$ \mapsto \varepsilon$, et donc si L n'est pas reconnaissable, alors $L_\$$ ne l'est pas non plus.

Enfin, si L ne vérifie pas les conditions de la troisième version du lemme de l'étoile, alors $L_\$$ ne les vérifie pas non plus. Si un mot $a_0\cdots a_m$ a servi à démontrer que L n'est pas reconnaissable en utilisant des positions sur les lettres a_{i_0} à a_{i_n}, alors on considère le mot de L_1 de la forme $\$a_0\$\cdots\$a_m\$$, et les positions correspondantes modulo l'ajout des symboles $\$$. On utilise alors un mot $w_l = a_0\cdots(a_{i_{j+1}}\cdots a_{i_k})^l\cdots a_m$ qui n'est pas dans L : l'itération du facteur $\$a_{i_{j+1}}\$\cdots\$a_{i_k}$ correspondant préserve la propriété qu'il n'y a qu'une seule lettre entre deux symboles $\$$, et donc le mot obtenu n'est pas dans L_2, et il n'est pas non plus dans L_1 puisque w_l n'est pas dans L.

Même dans sa troisième version, le lemme de l'étoile n'est qu'une condition *nécessaire* pour qu'un langage soit rationnel. Il est possible de renforcer la dernière version du lemme pour obtenir des caractérisations des langages rationnels. Ce résultat utilise deux propriétés de factorisation par blocs, qu'on pourra mettre en parallèle avec la version la plus forte du lemme de l'étoile cité précédemment. On fixe un entier h.

*C.f. l'article d'*EHRENFEUCHT *et al. [1981], [Car08, théorème 1.106] et [Sak03, sec. I.3.4].*

On dit qu'un langage L de Σ^* satisfait la *propriété* $\mathfrak{E}'_h$ (ou *propriété d'itération par blocs*) si pour tout mot $w \in \Sigma^*$ et toute factorisation de la forme $w = u_0u_1u_2\cdots u_hu_{h+1}$ avec $|u_i| \geq 1$ pour tout $i \in \{1,\ldots,h\}$, il existe un couple (j,k) d'indices, $0 \leq j < k \leq h$, tels que le mot obtenu en itérant dans w le facteur $u_{j+1}\cdots u_k$ un nombre quelconque de fois a même statut que w par rapport à L, *i.e.* :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w \in L \iff u_0u_1u_2\cdots u_j(u_{j+1}\cdots u_k)^n u_{k+1}\cdots u_hu_{h+1} \in L$$

On dit qu'un langage L de Σ^* satisfait la *propriété* $\mathfrak{E}_h$ (ou *propriété de simplification par blocs*) si pour tout mot $w \in \Sigma^*$ et toute factorisation de la forme $w = u_0u_1u_2\cdots u_hu_{h+1}$ avec $|u_i| \geq 1$ pour tout $i \in \{1,\ldots,h\}$, il existe un couple (j,k) d'indices, $0 \leq j < k \leq h$, tels que le mot obtenu en supprimant dans w le facteur $u_{j+1}\cdots u_k$ a même statut que w par rapport à L, *i.e.* :

$$w \in L \iff u_0u_1u_2\cdots u_ju_{k+1}\cdots u_hu_{h+1} \in L$$

Théorème 1.24 (EHRENFEUCHT, PARIKH, ROZENBERG)**.** *Soit L un langage de Σ^*. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) L est reconnaissable ;

(ii) il existe un entier h tel que L satisfait $\mathfrak{E}'_h$;

(iii) il existe un entier h tel que L satisfait $\mathfrak{E}_h$.

Démonstration. La preuve de ce théorème repose sur une généralisation du principe des tiroirs utilisé dans la preuve du lemme de l'étoile précédent. Il s'agit du théorème de RAMSEY :

Pour tous entiers k, m et r, il existe un entier $N = R(k, m, r)$ tel que, si un ensemble E est de cardinal supérieur ou égal à N, pour toute partition $\mathcal{P}$ de $\mathfrak{P}_{(k)}(E)$ (ensemble de toutes les parties à k éléments de E) en m classes, on peut trouver un sous-ensemble F de E de cardinal r tel que $\mathfrak{P}_{(k)}(F)$ est entièrement contenu dans une seule classe de $\mathcal{P}$.

L'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$ résulte de l'application de la version la plus forte du lemme de l'étoile, à la fois pour L et son complémentaire. Par ailleurs, il est évident que la propriété $\mathfrak{E}'_h$ implique la propriété $\mathfrak{E}_h$. Il reste donc à démontrer l'implication $(iii) \Longrightarrow (i)$. On le fait en deux étapes.

Première étape On montre que tout quotient (à gauche) $v^{-1}L = \{u \in \Sigma^* \mid vu \in L\}$ d'un langage L qui satisfait $\mathfrak{E}_h$ est un langage satisfaisant cette même propriété. Soit $w = u_0u_1u_2 \cdots u_hu_{h+1}$ une factorisation d'un mot w de Σ^*. Soit $w' = vw$: par hypothèse sur L, il existe un couple (j, k) d'indices, $0 \leq j < k \leq h$, tel que

$$w' = vu_0u_1u_2 \cdots u_hu_{h+1} \in L \Longleftrightarrow vu_0u_1u_2 \cdots u_ju_{k+1} \cdots u_hu_{h+1} \in L$$

qu'on peut réécrire en

$$w = u_0u_1u_2 \cdots u_hu_{h+1} \in v^{-1}L \Longleftrightarrow u_0u_1u_2 \cdots u_ju_{k+1} \cdots u_hu_{h+1} \in v^{-1}L$$

Ainsi, $v^{-1}L$ vérifie la propriété $\mathfrak{E}_h$.

Seconde étape On montre que l'ensemble des langages vérifiant $\mathfrak{E}_h$ est fini. Ainsi, mise en commun avec la première étape, on aura prouvé que le langage L possède un nombre fini de quotients à gauche, ce qui, comme on le verra dans la section 1.3.1, prouve que le langage L est reconnaissable.

Posons $N = R(2, 2, h+1)$ et $E = \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Soient L et K deux langages vérifiant la propriété $\mathfrak{E}_h$ qui coïncident sur les mots de longueur inférieure à $N-1$. Nous allons montrer, par récurrence sur la longueur des mots, que $K = L$: cela achèvera de prouver la seconde étape.

Supposons que L et K coïncident sur les mots de longueur inférieure à M, $M \geq N-1$, et soit $w = a_1a_2 \cdots a_{N-1}v$ un mot de Σ^* de longueur M. Soient X_w et Y_w les sous-ensembles de $\mathfrak{P}_{(2)}(E)$ définis par

$$X_w = \{(j, k) \mid 0 \leq j < k \leq N-1, \quad a_1a_2 \cdots a_ja_{k+1} \cdots a_{N-1}v \in L\}$$
$$Y_w = \mathfrak{P}_{(2)}(E) \backslash X_w$$

Par hypothèse de récurrence, X_w est aussi tel que

$$X_w = \{(j, k) \mid 0 \leq j < k \leq N-1, \quad a_1a_2 \cdots a_ja_{k+1} \cdots a_{N-1}v \in K\}$$

Par le théorème de RAMSEY, il existe un sous-ensemble $F = \{i_0 < i_1 < \cdots < i_h\}$ de E, de cardinal $h+1$, tel que ou bien

$$\mathfrak{P}_{(2)}(F) \subseteq X_w \tag{1.1}$$

ou bien

$$\mathfrak{P}_{(2)}(F) \subseteq Y_w \tag{1.2}$$

Soit alors $w = u_0u_1u_2\cdots u_hu_{h+1}v$ la factorisation de w obtenue en considérant les h couples d'indices consécutifs dans F, c'est-à-dire $u_0 = a_1\cdots a_{i_0}$, $u_1 = a_{i_0+1}\cdots a_{i_1}$, …, $u_h = a_{i_{h-1}+1}\cdots a_{i_h}$, $u_{h+1} = a_{i_h+1}\cdots a_{N-1}$.

Le choix de F implique que :

1. ou bien, pour tout $0 \leq j < k \leq h$, le mot $u_0u_1u_2\cdots u_ju_{k+1}\cdots u_hu_{h+1}v$ est à la fois dans L et dans K, si c'est (1.1) qui est vérifiée ;
2. ou bien, pour tout $0 \leq j < k \leq h$, le mot $u_0u_1u_2\cdots u_ju_{k+1}\cdots u_hu_{h+1}v$ n'est ni dans L ni dans K, si c'est (1.2) qui est vérifiée.

Puisque L et K vérifient la propriété $\mathfrak{E}_h$, il existe j' et k', $0 \leq j' < k' \leq h$ tels que w et $w' = u_0u_1u_2\cdots u_{j'}u_{k'+1}\cdots u_hu_{h+1}v$ ont même statut par rapport à L et il existe j'' et k'', $0 \leq j'' < k'' \leq h$ tels que w et $w'' = u_0u_1u_2\cdots u_{j''}u_{k''+1}\cdots u_hu_{h+1}v$ ont même statut par rapport à K.

Si on est dans le cas 1, w' et w'' sont dans L et dans K, et w est dans L comme w' et dans K comme w'' ; si on est dans le cas 2, w' et w'' ne sont ni dans L ni dans K, et w n'est ni dans L comme w' ni dans K comme w''. Dans les deux cas, w a même statut par rapport à L et K.

Par récurrence, on a ainsi montré que $K = L$. □

1.2 Langages rationnels

C.f. [Car08, sec. 1.5.1], [Sak03, sec. I.4], [Aut94, ch. 5], [SSS88, sec. 3.1], [HU79, sec. 2.5].

Définition 1.25. (Langage rationnel) $\mathrm{Rat}(\Sigma^*)$ est le plus petit ensemble de parties de Σ^* qui contient les parties finies de Σ^* et qui est fermé par union, concaténation et étoile. Un *langage rationnel* sur Σ^* est un élément de $\mathrm{Rat}(\Sigma^*)$.

Comme chaque partie finie de Σ^* est soit l'ensemble vide, soit une union finie de mots de Σ^*, et que ces mots sont soit le mot vide, soit la concaténation finie de lettres de Σ, on obtient une définition équivalente sous la forme d'expressions rationnelles.

Définition 1.26. (Expression rationnelle) Une *expression rationnelle* E sur Σ est un terme défini inductivement par

$$E ::= \emptyset \mid \varepsilon \mid a \mid E_1^* \mid E_1 + E_2 \mid E_1E_2$$

où a est un symbole de Σ, et E_1 et E_2 sont des expressions rationnelles.

On interprète une expression rationnelle E comme un langage $L(E)$ sur Σ^* défini inductivement par

$$\begin{aligned} L(\emptyset) &= \emptyset \\ L(\varepsilon) &= \{\varepsilon\} \\ L(a) &= \{a\} \\ L(E^*) &= L(E)^* \\ L(E_1 + E_2) &= L(E_1) \cup L(E_2) \\ L(E_1E_2) &= L(E_1)L(E_2) \end{aligned}$$

Le langage d'une expression rationnelle est bien un langage rationnel.

Deux mesures sont couramment utilisées pour la *taille* d'une expression rationnelle E : $|E|$ la taille du terme E, définie par

$$\begin{aligned} |\emptyset| = |\varepsilon| = |a| &= 1 \\ |E^*| &= |E| + 1 \\ |E_1 + E_2| = |E_1 E_2| &= |E_1| + |E_2| + 1 \end{aligned}$$

L'autre mesure est le nombre d'occurences de symboles alphabétiques dans E, défini par

$$\begin{aligned} \|\emptyset\| = \|\varepsilon\| &= 0 \\ \|a\| &= 1 \\ \|E^*\| &= \|E\| \\ \|E_1 + E_2\| = \|E_1 E_2\| &= \|E_1\| + \|E_2\| \end{aligned}$$

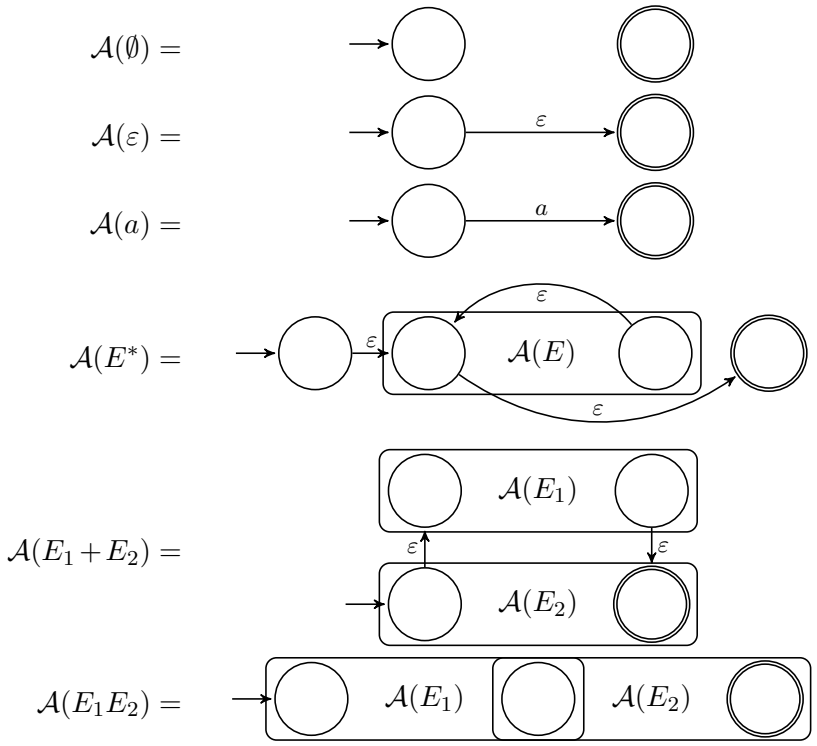
Comme annoncé au début du chapitre 1, le résultat central sur les langages rationnels est qu'ils coïncident avec les langages reconnaissables, sur le monoïde libre Σ^*.

1.2.1 Des expressions aux automates

Construction de THOMPSON

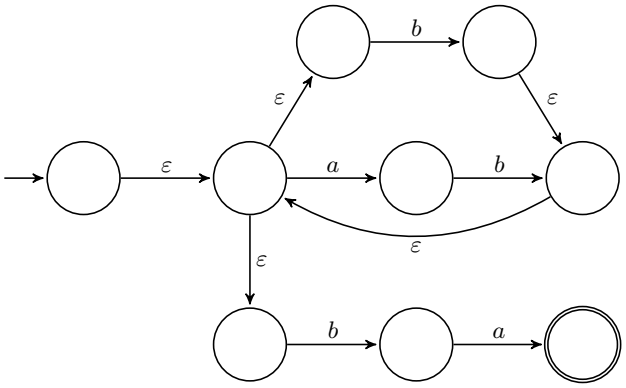
C.f. THOMPSON *[1968] et [Sak03, pp. 157–158], [SSS88, théorème 3.16], [HU79, théorème 2.3].*

La construction la plus simple et la plus intuitive : on construit un automate $\mathcal{A}(E)$ par induction sur l'expression rationnelle E. Les automates générés vérifient comme invariant qu'ils ont un unique état initial, qui n'a pas de transition entrante, et un unique état final, qui n'a pas de transition sortante. Cet invariant permet d'assurer la validité de la construction pour la concaténation et l'étoile.



Cette construction inductive travaille en $O(|E|)$ sur la taille de l'expression, et résulte en un automate avec ε-transitions avec au plus $2|E|$ états et $3|E|$ transitions, soit au final $O(|E|^2)$ une fois les ε-transitions éliminées.

Exemple 1.27. Par exemple, si on considère l'expression $E = (ab + b)^*ba$, on obtient par cette construction l'automate



Automate standard de GLUSHKOV

C.f. GLUSHKOV *[1961] et* MCNAUGHTON *et* YAMADA *[1960], et aussi* BERSTEL *et* PIN *[1996].*

Cette construction d'un automate équivalent à une expression rationnelle E est appréciable, d'une part parce qu'elle résulte en des automates de petite taille, et d'autre part parce qu'elle reflète fidèlement les propriétés de l'expression rationnelle de départ. Ainsi, la notion d'*ambiguïté* d'une expression rationnelle est définie comme l'ambiguïté de son automate de GLUSHKOV [EVEN, 1965]. En effet, cette construction résulte en un automate ayant un état pour chaque occurence d'un symbole de Σ dans l'expression E, et distingue ces différentes occurrences – ce qui revient à *linéariser* E.

Définition 1.28 (Expression linéaire)**.** Une expression rationnelle E sur Σ est *linéaire* si chaque symbole de Σ apparaît au plus une fois dans E.

Proposition 1.29. *Tout langage rationnel sur Σ est le résultat de l'application d'un morphisme alphabétique $\Delta \to \Sigma$ au langage d'une expression rationnelle linéaire sur Δ.*

Démonstration. Soit $L(E)$ un langage rationnel sur Σ décrit par une expression rationnelle E sur Σ. On indice chaque apparition d'une lettre a de Σ par sa position dans la lecture linéraire de l'expression, par exemple $(a+b)^*a$ devient $(a_1+b_2)^*a_3$. L'expression E' obtenue est bien linéaire sur Δ l'alphabet indicé, et l'image de $L(E')$ par le morphisme alphabétique $a_i \mapsto a$ est bien $L(E)$. □

La présentation suit fidèlement BERSTEL *et* PIN *[1996] ; voir aussi [Sak03, exercice II.1.8].*

Il nous faut faire un petit détour par les automates et langages locaux.

Définition 1.30 (Langage local)**.** Un langage L sur Σ est *local* s'il existe trois ensembles $P \subseteq \Sigma$, $S \subseteq \Sigma$ et $N \subseteq \Sigma^2$ tels que

$$L\backslash\{\varepsilon\} = (P\Sigma^* \cap \Sigma^* S)\backslash(\Sigma^* N \Sigma^*)$$

c.-à-d. tels que tout mot de L commence par un symbole dans P, finisse par un symbole dans S, et n'ait aucun facteur de longueur deux dans N. On peut définir

ces ensembles P, S et N par

$$P = \{a \in \Sigma \mid a\Sigma^* \cap L \neq \emptyset\}$$
$$S = \{a \in \Sigma \mid \Sigma^* a \cap L \neq \emptyset\}$$
$$N = \{ab \in \Sigma^2 \mid \Sigma^* ab \Sigma^* \cap L = \emptyset\}.$$

Définition 1.31 (Automate local)**.** Un automate fini déterministe est *local* si, pour chaque symbole a de Σ, $|\{q' \in Q \mid \exists q \in Q, (q, a, q') \in \delta\}| \leq 1$. Il est de plus *standard* si son état initial n'a pas de transition entrante.

Lemme 1.32. *Les trois énoncés suivants sont équivalents :*

1. *L est un langage local,*
2. *L est reconnu par un automate local standard,*
3. *L est reconnu par un automate local.*

Démonstration.
1⇒2. On construit l'automate $\mathcal{A} = \langle \Sigma, \Sigma \uplus \{i\}, \{i\}, F, \delta \rangle$ avec pour relation de transition

$$\delta = \{(i, a, a) \mid a \in P\} \cup \{(b, a, a) \mid ba \notin N\}$$

et S pour ensemble final, plus potentiellement l'état i si ε appartient à L. On vérifie aisément que $\mathcal{A}$ est déterministe, local et standard. Il reconnaît de plus L : soit une exécution de $\mathcal{A}$

$$i \xrightarrow{a_1} a_1 \xrightarrow{a_2} a_2 \cdots \xrightarrow{a_n} a_n$$

avec $n > 0$ et $a_n \in F$. Alors $w = a_1 \cdots a_n$ vérifie $a_1 \in P$, $a_n \in S$ et pour tout i de 1 à $n-1$, $a_i a_{i+1} \notin N$, donc $w \in L$. Inversement, si un mot $w \neq \varepsilon$ vérifie ces trois conditions, alors il existe bien cette même exécution dans $\mathcal{A}$, et donc $w \in L(\mathcal{A})$.
2⇒3. Évident.
3⇒1. À partir d'un automate déterministe local $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$, on calcule les ensembles

$$P(\mathcal{A}) = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_0, a) \neq \emptyset\}$$
$$S(\mathcal{A}) = \{a \in \Sigma \mid \exists q \in Q, \delta(q, a) \in F\}$$
$$N(\mathcal{A}) = \Sigma^2 \backslash \{ab \in \Sigma^2 \mid \exists q \in Q, \delta^*(q, ab) \neq \emptyset\}$$
$$L = (P(\mathcal{A})\Sigma^* \cap \Sigma^* S(\mathcal{A})) \backslash (\Sigma^* N(\mathcal{A}) \Sigma^*)$$

On peut noter que L est un langage local. Soit maintenant une exécution dans $\mathcal{A}$

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \cdots \xrightarrow{a_n} q_n$$

avec $n > 0$ et $q_n \in F$. Alors $a_1 \in P(\mathcal{A})$, $a_n \in S(\mathcal{A})$ et pour tout i de 1 à $n-1$, $a_i a_{i+1} \notin N(\mathcal{A})$, donc $w = a_1 \cdots a_n$ appartient à L.

Inversement, soit $w = a_1 \cdots a_n$ dans L. On montre inductivement pour chaque i de 1 à n qu'il existe une exécution

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \cdots \xrightarrow{a_i} q_i$$

dans $\mathcal{A}$. Puisque $a_1 \in P(\mathcal{A})$, la transition $\delta(q_0, a_1) = q_1$ est bien définie. Puis, puisque $a_i a_{i+1} \notin N$, il existe q et q' tels que $\delta^*(q, a_i a_{i+1}) = q'$. Comme $\mathcal{A}$ est local, $\delta(q, a_i) = \delta(q_{i-1}, a_i) = q_i$, et par suite $q' = \delta(q_i, a_{i+1})$ peut être pris en guise de q_{i+1}. Enfin, $a_n \in S$ implique qu'il existe q dans Q et q_f dans F tels que $\delta(q, a_n) = q_f$, et encore une fois, comme $\mathcal{A}$ est local, $\delta(q, a_n) = \delta(q_{n-1}, a_n)$, donc l'exécution dans $\mathcal{A}$ se finit dans $q_n = q_f$. □

On s'intéresse aussi aux propriétés de clôture des langages locaux.

Lemme 1.33. *Soient L_1 et L_2 deux langages locaux sur des alphabets* disjoints Σ_1 *et Σ_2. Alors $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cdot L_2$ et L_1^* sont des langages locaux.*

Démonstration. Par le lemme 1.32, il suffit de prendre des automates locaux standards $\mathcal{A}_1 = \langle \Sigma_1, \Sigma_1 \uplus \{i_1\}, i_1, F_1, \delta_1 \rangle$ et $\mathcal{A}_2 = \langle \Sigma_2, \Sigma_2 \uplus \{i_2\}, i_2, F_2, \delta_2 \rangle$ pour L_1 et L_2 et de construire un automate local $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ pour le langage désiré.

Pour l'union, on pose $\Sigma = \Sigma_1 \uplus \Sigma_2$, $Q = \Sigma_1 \uplus \Sigma_2 \uplus \{q_0\}$ et

$$F = \begin{cases} F_1 \uplus F_2 \uplus \{q_0\} & \text{si } i_1 \in F_1 \text{ ou } i_2 \in F_2 \\ F_1 \uplus F_2 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$\delta = \{(q_0, a, a) \mid (i_1, a, a) \in \delta_1 \text{ ou } (i_2, a, a) \in \delta_2\} \cup ((\delta_1 \cup \delta_2) \cap \Sigma^3) \ .$$

Pour la concaténation, on pose $\Sigma = \Sigma_1 \uplus \Sigma_2$, $Q = \Sigma_1 \uplus \Sigma_2 \uplus \{i_1\}$, $q_0 = i_1$ et

$$F = \begin{cases} F_1 \cup F_2 & \text{si } i_2 \in F_2 \\ F_2 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$\delta = \delta_1 \cup \{(q, a, a) \mid q \in F_1, (i_2, a, a) \in \delta_2\} \cup (\delta_2 \cap \Sigma^3) \ .$$

Pour l'étoile de KLEENE, on pose $\Sigma = \Sigma_1$, $Q = \Sigma_1 \uplus \{i_1\}$, $q_0 = i_1$, $F = F_1 \cup \{i_1\}$, et $\delta = \delta_1 \cup \{(a, b, b) \mid a \in F_1 \text{ et } (i_1, b, b) \in \delta_1\}$. □

Proposition 1.34. *Pour toute expression linéaire E sur Σ, on peut construire un automate local $\mathcal{A}$ sur Σ tel que $L(E) = L(\mathcal{A})$.*

Démonstration. Comme E est linéaire, par le lemme 1.33, son langage $L(E)$ est local. On calcule inductivement sur E les ensembles de symboles préfixes $P(E)$, de symboles suffixes $S(E)$, et de paires de symboles facteurs $F(E)$, en utilisant aussi $\lambda(E)$ égal à $\{\varepsilon\}$ si $\varepsilon \in L(E)$ et à $\emptyset$ sinon :

$$\begin{aligned} \lambda(\emptyset) &= \emptyset & P(\emptyset) &= \emptyset \\ \lambda(\varepsilon) &= \{\varepsilon\} & P(\varepsilon) &= \emptyset \\ \lambda(a) &= \emptyset & P(a) &= \{a\} \\ \lambda(E^*) &= \{\varepsilon\} & P(E^*) &= P(E) \\ \lambda(E_1 + E_2) &= \lambda(E_1) \cup \lambda(E_2) & P(E_1 + E_2) &= P(E_1) \cup P(E_2) \\ \lambda(E_1 E_2) &= \lambda(E_1) \cap \lambda(E_2) & P(E_1 E_2) &= P(E_1) \cup \lambda(E_1) P(E_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(\emptyset) &= \emptyset & F(\emptyset) &= \emptyset \\ S(\varepsilon) &= \emptyset & F(\varepsilon) &= \emptyset \\ S(a) &= \{a\} & F(a) &= \emptyset \\ S(E^*) &= S(E) & F(E^*) &= F(E) \cup S(E) P(E) \\ S(E_1 + E_2) &= S(E_1) \cup S(E_2) & F(E_1 + E_2) &= F(E_1) \cup F(E_2) \\ S(E_1 E_2) &= S(E_2) \cup \lambda(E_2) P(E_1) & F(E_1 E_2) &= F(E_1) \cup F(E_2) \cup S(E_1) P(E_2) \end{aligned}$$

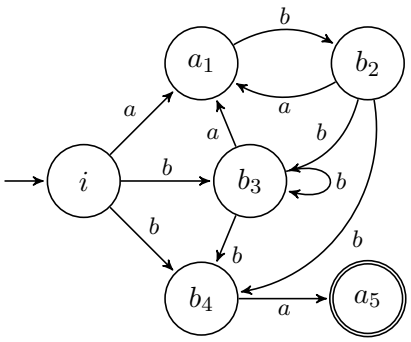
Comme $L(E)$ est local, il vérifie

$$L(E) \backslash \{\varepsilon\} = (P(E)\Sigma^* \cap \Sigma^* S(E)) \backslash (\Sigma^* (\Sigma^2 \backslash F(E)) \Sigma^*)$$

On conclut en utilisant la construction du lemme 1.32 pour obtenir un automate local pour $L(E)$. □

En combinant les propositions 1.29 et 1.34, on obtient une méthode de construction d'un automate fini sans ε-transitions à partir d'une expression rationnelle E, avec *exactement* $\|E\| + 1$ états, où $\|E\|$ est le nombre d'apparitions de symboles de Σ dans E, et au pire $O(\|E\|^2)$ transitions – réellement obtenues sur l'expression correspondant à l'exemple 1.9.

Exemple 1.35. Considérons à nouveau l'expression rationnelle $E = (ab + b)^*ba$. On peut la linéariser en $(a_1b_2 + b_3)^*b_4a_5$, et en déduire l'automate suivant.



Expressions dérivées partielles d'ANTIMIROV

*Cette section reprend les preuves d'*ANTIMIROV *[1996] ; voir aussi [Sak03, sec. I.5.2], et la construction similaire de* BRZOZOWSKI *[1964] dans [Sak03, sec. I.4.4].*

Cette technique de construction d'un automate équivalent à une expression rationnelle fournit des automates, généralement non déterministes, encore plus compacts que ceux de l'automate de GLUSHKOV. Cette construction est un raffinement de celle mise au point par BRZOZOWSKI [1964], et le déterminisé de l'automate que l'on obtient est exactement celui que l'on aurait obtenu par la construction de BRZOZOWSKI.

Définition 1.36 (Dérivée d'une expression)**.** La *dérivée partielle* $\partial_a(E)$ d'une expression rationnelle E sur Σ par une lettre a de Σ est l'ensemble d'expressions rationnelles sur Σ défini par

$$\begin{aligned}
\partial_a(\emptyset) &= \emptyset \\
\partial_a(\varepsilon) &= \emptyset \\
\partial_a(b) &= \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{si } a = b \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \\
\partial_a(E + F) &= \partial_a(E) \cup \partial_a(F) \\
\partial_a(E^*) &= \partial_a(E) \cdot \{E^*\} \\
\partial_a(EF) &= \begin{cases} \partial_a(E) \cdot \{F\} & \text{si } \varepsilon \notin L(E) \\ \partial_a(E) \cdot \{F\} \cup \partial_a(F) & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

où l'opération de concaténation est étendue de manière évidente aux ensembles d'expressions rationnelles. Attention, dans $\partial_a(\emptyset) = \emptyset$, le symbole « $\emptyset$ » du terme de gauche est une expression rationnelle, tandis que celui du terme de droite est l'ensemble vide !

On étend cette définition à des mots w de Σ^* et à des ensembles d'expressions

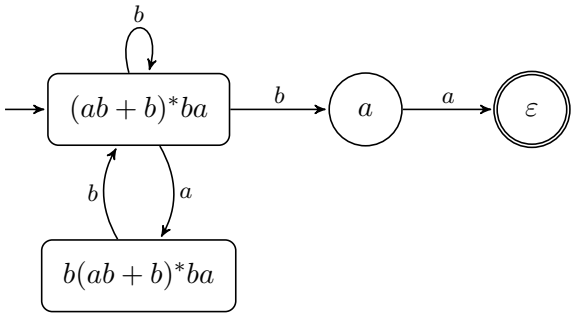
rationnelles S par

$$\begin{aligned}\partial_\varepsilon(E) &= \{E\}\\ \partial_{wa}(E) &= \partial_a(\partial_w(E))\\ \partial_w(S) &= \bigcup_{E\in S} \partial_w(E)\ .\end{aligned}$$

Exemple 1.37. Par exemple, si on pose $E = (ab+b)^*ba$, on obtient les dérivées partielles successives

$$\begin{aligned}\partial_a(E) &= \{b(ab+b)^*ba\}\\ \partial_b(E) &= \{E, a\}\\ \partial_a(b(ab+b)^*ba) &= \emptyset\\ \partial_b(b(ab+b)^*ba) &= \{E\}\\ \partial_a(a) &= \{\varepsilon\}\\ \partial_b(a) &= \emptyset\\ \partial_a(\varepsilon) &= \emptyset\\ \partial_b(\varepsilon) &= \emptyset\ .\end{aligned}$$

Cet ensemble de dérivées partielles se traduit aisément en un automate :



L'automate construit à partir des expressions dérivées partielles d'une expression rationnelle E est $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \delta\rangle$ ayant pour ensemble d'états des expressions rationnelles, et dont les transitions respectent les dérivations :

$$\begin{aligned}Q &= \{E_1 \mid \exists w \in \Sigma^*, E_1 \in \partial_w(E)\}\\ I &= \{E\}\\ F &= \{E_1 \in Q \mid \varepsilon \in L(E_1)\}\\ \delta &= \{(E_1, a, E_2) \in Q \times \Sigma \times Q \mid E_2 \in \partial_a(E_1)\}\ .\end{aligned}$$

Le fait que cet automate reconnaît $L(E)$ découle de la proposition 1.38, et le fait qu'il soit bien un automate *fini* de la proposition 1.40.

On note par $w^{-1}L = \{u \in \Sigma^* \mid wu \in L\}$ le quotient à gauche de $L \subseteq \Sigma^*$ par $w \in \Sigma^*$.

Proposition 1.38. *Soit S un ensemble d'expressions rationnelles sur Σ et w un mot de Σ^*. Alors $L(\partial_w(S)) = w^{-1}L(S)$.*

Démonstration. On opère par récurrence sur la longueur de w. Si $w = \varepsilon$, alors par définition $L(\partial_\varepsilon(S)) = L(S)$. Soit maintenant $w = ua$, a appartenant à Σ ; on

vérifie trivialement par induction sur les expressions E de $\partial_u(S)$ que $L(\partial_a(E)) = a^{-1}L(E)$. On a donc

$$L(\partial_{ua}(S)) = L(\partial_a(\partial_u(S))) = \bigcup_{E\in\partial_u(S)} L(\partial_a(E)) = \bigcup_{E\in\partial_u(S)} a^{-1}L(E) = a^{-1}L(\partial_u(S))$$

et, en appliquant l'hypothèse de récurrence sur $L(\partial_u(S))$,

$$L(\partial_{ua}(S)) = a^{-1}u^{-1}L(S) = (ua)^{-1}L(S)\ .$$ □

On note l'ensemble des suffixes non vides d'un mot w par

$$\text{Suff}_+(w) = \{v \in \Sigma^+ \mid \exists u \in \Sigma^*, w = uv\}\ .$$

Lemme 1.39. *Pour tout mot w de Σ^+ et expressions E et F sur Σ, on a :*

$$\partial_w(E+F) = \partial_w(E) \cup \partial_w(F) \tag{1.3}$$

$$\partial_w(EF) \subseteq \partial_w(E)\cdot F \cup \bigcup_{v\in \mathit{Suff}_+(w)} \partial_v(F) \tag{1.4}$$

$$\partial_w(E^*) \subseteq \bigcup_{v\in \mathit{Suff}_+(w)} \partial_v(E)\cdot E^* \tag{1.5}$$

Démonstration. L'équation (1.3) est immédiate par récurrence sur $w = ua$, a appartenant à Σ :

$$\begin{aligned}\partial_{ua}(E+F) &= \partial_a(\partial_u(E+F)) = \partial_a(\partial_u(E)\cup\partial_u(F)) = \partial_a(\partial_u(E)) \cup \partial_a(\partial_u(F))\\ &= \partial_{ua}(E)\cup\partial_{ua}(F)\ .\end{aligned}$$

L'équation (1.4) est démontrée par recurrence sur $w = ua$, a appartenant à Σ. Si $u = \varepsilon$, alors on a bien

$$\partial_a(EF) \subseteq \partial_a(E)\cdot F \cup \partial_a(F) = \partial_a(E)\cdot F \cup \bigcup_{v\in\text{Suff}_+(a)} \partial_v(F)$$

puisque $\text{Suff}_+(a) = \{a\}$. Puis

$$\begin{aligned}\partial_{ua}(EF) &= \partial_a(\partial_u(EF))\\ &\subseteq \partial_a\left(\partial_u(E)\cdot F \cup \bigcup_{v\in\text{Suff}_+(u)} \partial_v(F)\right)\\ &= \partial_a(\partial_u(E)\cdot F) \cup \bigcup_{v\in\text{Suff}_+(u)} \partial_a(\partial_v(F))\\ &\subseteq \partial_a(\partial_u(E))\cdot F \cup \partial_a(F) \cup \bigcup_{v\in\text{Suff}_+(u)} \partial_{va}(F)\\ &= \partial_{ua}(E)\cdot F \cup \bigcup_{v\in\text{Suff}_+(ua)} \partial_v(F)\end{aligned}$$

Enfin l'équation (1.5) est elle aussi démontrée par récurrence sur $w = ua$, a appartenant à Σ. Si $u = \varepsilon$, alors

$$\partial_a(E^*) = \partial_a(E)\cdot E^* = \bigcup_{v\in\text{Suff}_+(a)} \partial_v(E)\cdot E^*\ .$$

Puis,

$$\begin{aligned}
\partial_{ua}(E^*) &= \partial_a(\partial_u(E^*)) \\
&\subseteq \partial_a\left(\bigcup_{v\in\mathsf{Suff}_+(u)} \partial_v(E)\cdot E^*\right) \\
&= \bigcup_{v\in\mathsf{Suff}_+(u)} \partial_a(\partial_v(E)\cdot E^*) \\
&\subseteq \bigcup_{v\in\mathsf{Suff}_+(u)} (\partial_a(\partial_v(E))\cdot E^* \cup \partial_a(E^*)) \\
&= \left(\bigcup_{v\in\mathsf{Suff}_+(u)} \partial_{va}(E)\cdot E^*\right) \cup \partial_a(E)\cdot E^* \\
&= \bigcup_{v\in\mathsf{Suff}_+(ua)} \partial_v(E)\cdot E^* \ .
\end{aligned}$$

□

On montre maintenant que l'ensemble des dérivées partielles d'une expression E est fini, et même qu'il est borné par $\|E\|+1$, ce qui rend l'automate d'ANTIMIROV plus compact que celui de GLUSHKOV.

La taille de l'automate demeure cependant en $O(\|E\|^2)$, comme on peut le constater sur l'exemple 1.9.

Proposition 1.40. *L'ensemble des dérivées partielles différentes d'une expression rationnelle E par tous les mots de Σ^* contient au plus $\|E\|+1$ éléments.*

Démonstration. Montrons par induction sur E que $|\bigcup_{w\in\Sigma^+}\partial_w(E)| \leq \|E\|$. Le lemme sera alors démontré puisque

$$|\bigcup_{w\in\Sigma^*}\partial_w(E)| = |\partial_\varepsilon(E)\cup\bigcup_{w\in\Sigma^+}\partial_w(E)| \leq \|E\|+1\ .$$

Les cas de base, pour $E=\emptyset$, $E=\varepsilon$ et $E=a$ avec a dans Σ sont évidents. On vérifie ensuite grâce aux équations du lemme 1.39

$$\begin{aligned}
|\bigcup_{w\in\Sigma^+}\partial_w(E+F)| &= |\bigcup_{w\in\Sigma^+}(\partial_w(E)\cup\partial_w(F))| = |\bigcup_{w\in\Sigma^+}\partial_w(E)| + |\bigcup_{w\in\Sigma^+}\partial_w(F)| \\
&\leq \|E\|+\|F\| \\
|\bigcup_{w\in\Sigma^+}\partial_w(EF)| &\leq \left|\bigcup_{w\in\Sigma^+}\left(\partial_w(E)\cdot F\cup\bigcup_{v\in\mathsf{Suff}_+(w)}\partial_v(F)\right)\right| \\
&= \left|\left(\bigcup_{w\in\Sigma^+}\partial_w(E)\right)\cdot F\right| + \left|\bigcup_{w\in\Sigma^+}\bigcup_{v\in\mathsf{Suff}_+(w)}\partial_v(F)\right| \\
&\leq \|E\|+\|F\| \\
|\bigcup_{w\in\Sigma^+}\partial_w(E^*)| &\leq \left|\bigcup_{w\in\Sigma^+}\bigcup_{v\in\mathsf{Suff}_+(w)}\partial_v(E)\cdot E^*\right| \\
&= \left|\bigcup_{w\in\Sigma^+}\partial_w(E)\cdot E^*\right| \\
&\leq \|E\|\ .
\end{aligned}$$

□

1.2.2 Des automates aux expressions

Cette direction du théorème de KLEENE est la moins utile en pratique, et la plus coûteuse. Nous allons voir trois techniques pour réaliser cette conversion, qui sont en réalité trois présentations d'une même technique (c.f. [Sak03, sec. 4.3]).

C.f. MCNAUGHTON *et* YAMADA *[1960] et [Car08, p. 38], [Sak03, pp. 103–104], [Aut94, p. 53], [*BEAUQUIER *et al., 1992, p. 305], [SSS88, théorème 3.17], [HU79, théorème 2.4], [Har78, sec. 2.4].*

Construction de MCNAUGHTON et YAMADA

La construction la plus simple à démontrer, que l'on trouvera dans beaucoup d'ouvrages. En revanche, elle est délicate à utiliser à la main.

Soit $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \delta \rangle$ un automate fini ; on va chercher à calculer des expressions rationnelles dérivant les langages

$$L_{p,q} = \{w \in \Sigma^* \mid q \in \delta^*(p, w)\}$$

reconnus entre deux états p et q de Q. En effet, le langage de $\mathcal{A}$ est l'union finie

$$L(\mathcal{A}) = \bigcup_{p \in I, q \in F} L_{p,q} \,.$$

On ordonne les états de Q, alors vu comme l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, et on construit incrémentalement des expressions rationnelles pour les ensembles de chemins $L^{(k)}_{p,q}$ de p à q qui ne passent que par des états intermédiaires inférieurs à un certain k. Cette méthode fournit les expressions désirées puisque $L^{(n)}_{p,q} = L_{p,q}$. On pose initialement

$$L^{(0)}_{p,q} = \begin{cases} \sum_{(p,a,q) \in \delta} a + \varepsilon & \text{si } p = q \\ \sum_{(p,a,q) \in \delta} a & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis, pour l'étape d'induction sur k de 1 à n, on vérifie

$$L^{(k)}_{p,q} = L^{(k-1)}_{p,q} + L^{(k-1)}_{p,k} \cdot (L^{(k-1)}_{k,k})^* \cdot L^{(k-1)}_{k,q}$$

C.f. BRZOZOWSKI *et* MCCLUSKEY *[1963] et [Car08, p. 39], [Sak03, pp. 105–107].*

Construction de BRZOZOWSKI et MCCLUSKEY

Cette construction est plus intuitive, et plus aisée à utiliser à la main. Elle consiste à éliminer un à un les états de l'automate, et de mettre ses transitions à jour en consquence, en utilisant des parties rationnelles de Σ^* comme étiquettes de transitions.

Définition 1.41 (Automate généralisé)**.** Un *automate généralisé* est un automate fini $\mathcal{A} = \langle 2^{\Sigma^*}, Q, I, F, \delta \rangle$, c'est-à-dire un automate dont les transitions sont étiquetées par des langages L sur Σ.

Proposition 1.42. *Soit $\mathcal{A} = \langle \mathit{Rat}(\Sigma^*), Q, I, F, \delta \rangle$ un automate généralisé. Alors $L(\mathcal{A}) \in \mathit{Rat}(\Sigma^*)$.*

Démonstration. La preuve consiste en la construction d'un automate

$$\mathcal{A}'_n = \langle \mathrm{Rat}(\Sigma^*), \{q_0, q_f\}, \{q_0\}, \{q_f\}, \{(q_0, L(\mathcal{A}), q_f)\} \rangle$$

équivalent à $\mathcal{A}$.

On construit tout d'abord un automate $\mathcal{A}'_0$ avec un unique état initial q_0, un unique état final q_f, et une seule transition entre deux états q et q' de $\mathcal{A}$:

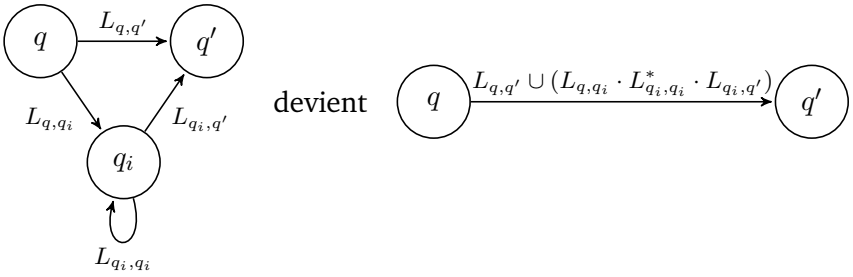
$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'_0 &= \langle \text{Rat}(\Sigma^*), Q \uplus \{q_0, q_f\}, \{q_0\}, \{q_f\}, \delta_0 \rangle \\
\delta_0 &= \{(q_0, \{\varepsilon\}, q) \mid q \in I\} \cup \{(q_0, \emptyset, q) \mid q \in (Q \backslash I) \uplus \{q_f\} \\
&\quad \cup \{(q, \{\varepsilon\}, q_f) \mid q \in F\} \cup \{(q, \emptyset, q_f) \mid q \in (Q \backslash F) \uplus \{q_0\}\} \\
&\quad \cup \{(q, \bigcup_{(q,L,q') \in \delta} L, q') \mid q \neq q' \in Q\} \cup \{(q, \{\varepsilon\} \cup \bigcup_{(q,L,q) \in \delta} L, q) \mid q \in Q\} \ .
\end{aligned}$$

Notons qu'une transition existe entre toute paire d'états de $\mathcal{A}'_0$, potentiellement étiquetée par ε ou $\emptyset$. Cet automate est bien équivalent à $\mathcal{A}$, et a bien ses étiquettes dans $\text{Rat}(\Sigma^*)$.

La suite de la construction procède par induction sur $n = |Q|$ pour construire des automates $\mathcal{A}'_i$ où le $i$ème état est éliminé de $\mathcal{A}'_{i-1}$, tels que $\mathcal{A}'_i$ soit encore équivalent à $\mathcal{A}$. Notons q_i l'état de Q éliminé à l'étape i, on a alors

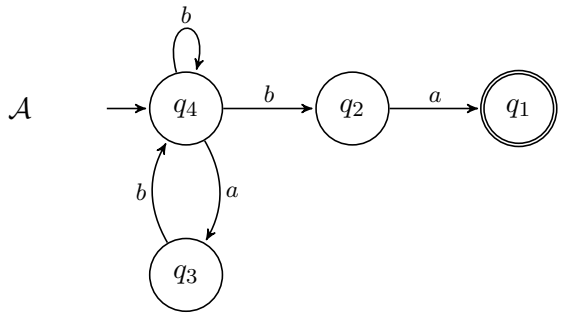
$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'_i &= \langle \text{Rat}(\Sigma^*), \{q_{i+1}, \ldots, q_n, q_0, q_f\}, \{q_0\}, \{q_f\}, \delta_i \rangle \\
\delta_i &= \{(q, L_{q,q'} \cup (L_{q,q_i} \cdot L^*_{q_i,q_i} \cdot L_{q_i,q'}), q') \\
&\qquad \mid (q, L_{q,q'}, q'), (q, L_{q,q_i}, q_i), (q_i, L_{q_i,q_i}, q_i), (q_i, L_{q_i,q'}, q') \in \delta_{i-1}\} \ .
\end{aligned}$$

Schématiquement :

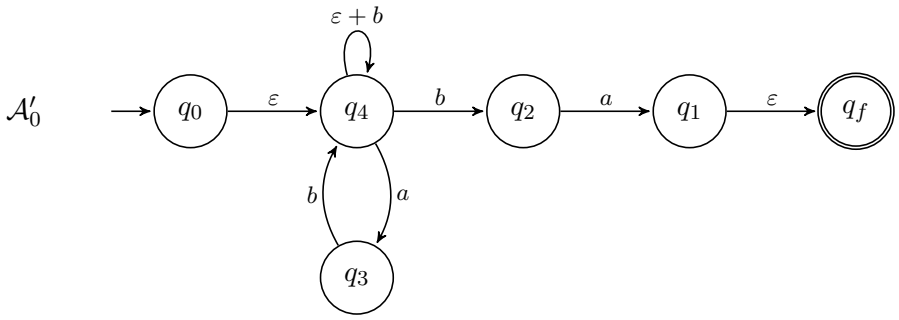


On vérifie bien que $\mathcal{A}'_i$ est équivalent à $\mathcal{A}'_{i-1}$, et donc par hypothèse d'induction, à l'automate $\mathcal{A}$ d'origine. □

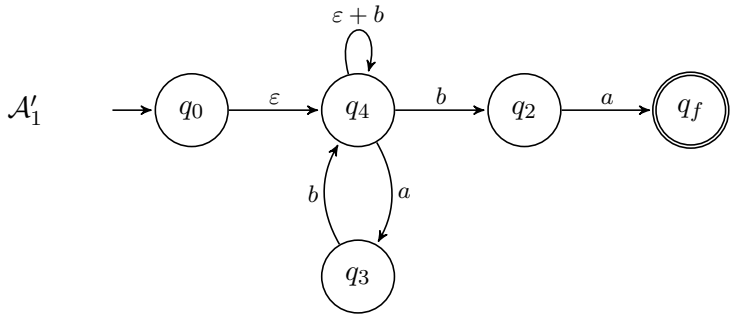
Exemple 1.43. Appliquons cette technique d'élimination à l'automate $\mathcal{A}$ suivant :

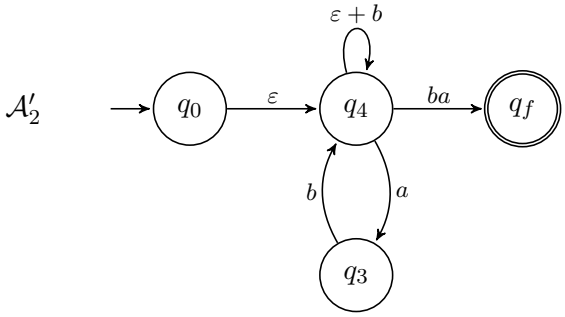


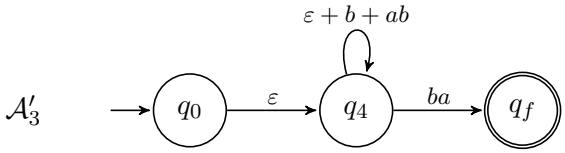
La première étape est la construction de l'automate $\mathcal{A}'_0$; ici nous étiquetons les transitions avec des expressions rationnelles, et ne faisons pas apparaître les transitions étiquetées par $\emptyset$, ni les boucles élémentaires uniquement étiquetées par ε (qui devraient apparaître sur chacun des états q_1 à q_3) :

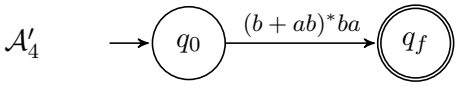


On obtient alors successivement les automates









*C.f. [Car08, p. 40], [Sak03, p. 107], [*BEAUQUIER *et al., 1992, p. 306].*

Lemme d'ARDEN et élimination de GAUSS

Voici enfin une troisième méthode pour calculer une expression rationnelle à partir d'un automate fini. Le principe est d'exprimer les langages de chaque état p de Q dans un système d'équations d'inconnues X_p, à valeur dans 2^{Σ^*} :

$$X_p = \begin{cases} \sum_{(p,a,q)\in\delta} aX_q + \varepsilon & \text{si } p \in F \\ \sum_{(p,a,q)\in\delta} aX_q & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $L(\mathcal{A})$ est l'union finie des solutions $\bigcup_{p\in I} X_p$, il suffit de montrer que ces solutions sont elles-même rationnelles.

Un tel système se résout par une élimination de GAUSS, en ordonnant les X_i. On exprime alors chaque X_i comme la solution d'une équation $X_i = K_iX_i + L_i$ avec

K_i et L_i des langages sur $\Sigma \uplus \{X_{i+1}, \ldots, X_n\}$ pour $n = |Q|$, équation que l'on résout en utilisant le lemme d'ARDEN ci-dessous. On substitue ensuite cette solution à X_i dans les équations pour X_j, $j > i$. Le fait que ces solutions soient rationnelles découle de la rationnalité de K_1 et L_1 (qui sont dans $\mathrm{Rat}((\Sigma \uplus \{X_2, \ldots, X_n\})^*)$), puis de X_1 par le lemme d'ARDEN, et par induction pour chacun des K_i et L_i.

Lemme 1.44 (ARDEN)**.** *Soient K et L deux langages sur Σ, et l'équation $X = KX + L$ d'inconnue X à valeur dans 2^{Σ^*}. Alors*

1. *$X = K^*L$ est la plus petite solution,*
2. *si $\varepsilon \notin K$, $X = K^*L$ est l'unique solution,*
3. *si $\varepsilon \in K$, les solutions sont $X = K^*Y$ où $L \subseteq Y \subseteq \Sigma^*$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que K^*L est une solution de l'équation. En effet, $K \cdot (K^*L) + L = K^+L + L = (K^+ + \varepsilon)L = K^*L$.

1. Montrons maintenant que si X est une solution, alors $K^*L \subseteq X$, et donc que K^*L est la plus petite solution. Procédons par induction et montrons pour cela que $K^nL \subseteq X$ pour tout $n \geq 0$. Initialement, $L \subseteq X$. Par suite, $KX \subseteq X$ et en appliquant l'hypothèse d'induction $K^nL \subseteq X$, on déduit $K^{n+1}L \subseteq X$.
2. Si $\varepsilon \notin K$, montrons que toute solution X vérifie $X \subseteq K^*L$, qui sera alors l'unique solution. Par l'absurde, soit w le mot de longueur minimale dans $X \backslash K^*L$. Alors $w \notin L$, et donc nous n'avons pas d'autre choix que $w \in KX$ pour satisfaire l'équation. On en déduit $w = uv$ avec $u \in K$ différent de ε et v dans X est strictement plus court que w, donc v est aussi dans K^*L. Mais alors $w \in K^*L$, une contradiction.
3. Si $\varepsilon \in K$, soit un langage Y sur Σ tel que $L \subseteq Y$, alors K^*Y est solution de l'équation. Inversement, si X est une solution, $L \subseteq K^*L \subseteq X$ et par induction K^*X est aussi solution. □

À noter que si l'on part d'un automate sans ε-transitions, on n'utilise alors que l'énoncé (2) du lemme – l'énoncé (3) est là pour répondre aux jurys facétieux...

Complexité des expressions rationnelles

Si l'on dispose de complexités raisonnables pour la conversion d'une expression rationnelle en un automate équivalent, ce n'est pas le cas des expressions rationnelles que l'on peut construire à partir d'un automate fini.

Borne supérieure Le premier point, le plus simple, est que l'on peut trouver au pire une expression E avec $\|E\| = O(4^n)$ pour un automate de taille n. Cette borne s'obtient en examinant l'algorithme de MCNAUGHTON et YAMADA, et en posant S_k pour la taille de la plus grande expression $L_{p,q}^{(k)}$:

$$
\begin{aligned}
S_k &= \max\{\|L_{p,q}^{(k)}\| \mid p, q \in Q\} \\
S_0 &\leq |\Sigma| \\
S_k &\leq 4S_{k-1} \ .
\end{aligned}
$$

La preuve de cette borne inférieure est tirée de EHRENFEUCHT *et* ZEIGER *[1976] ; voir aussi [SSS88, exercice 3.16].*

Borne inférieure Le second point est qu'il existe une famille d'automates de taille n^2 pour laquelle toute expression rationnelle équivalente vérifie $|E| \geq 2^{n-1}$. Soit en effet l'automate $\mathcal{A}_n = \langle Q_n, \Sigma_{n^2}, \{1\}, \{1\}, \delta\rangle$ défini par

$$\begin{aligned} Q_n &= \{1, \ldots, n\} \\ \Sigma_{n^2} &= \{a_{ij} \mid i, j \in Q_n\} \\ \delta &= \{(i, a_{ij}, j) \mid i, j \in Q_n\} \ . \end{aligned}$$

Le graphe sous-jacent de $\mathcal{A}_n$ est le graphe complet sur l'ensemble de sommets $\{1, \ldots, n\}$.

Définition 1.45 (Expression normale)**.** Une expression rationnelle est *normale* à un automate $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, I, F, \delta\rangle$ s'il existe deux fonctions i et f des sous-expressions de E, notées sub(E), dans Q telles que

1. si $E_1 + E_2 \in \text{sub}(E)$, alors $i(E_1) = i(E_2) = i(E_1 + E_2)$ et $f(E_1) = f(E_2) = f(E_1 + E_2)$,
2. si $E_1E_2 \in \text{sub}(E)$, alors $i(E_1) = i(E_1E_2)$, $f(E_2) = f(E_1E_2)$, et $f(E_1) = i(E_2)$,
3. si $E_1^* \in \text{sub}(E)$, alors $i(E_1) = i(E_1^*) = f(E_1) = f(E_1^*)$,
4. si $E_1 \in \text{sub}(E)$, alors $L(E_1) \subseteq L_{i(E_1),f(E_1)}$.

Remarquons que *toute* expression rationnelle E telle que $L(E) = L(\mathcal{A}_n)$ est normale à $\mathcal{A}_n$: il suffit de trouver le point de découpe dans une sous-expression E_1E_2 (les autres cas ne laissant pas de choix), et pour cela d'inspecter $P(E_2)$ (c.f. proposition 1.34) pour trouver a_{ij} et en déduire $f(E_1) = i(E_2) = i$. On pourrait procéder de manière équivalente en inspectant $S(E_1)$ pour trouver un symbole a_{ki}. Ce choix de i est bien unique : en effet, s'il existait aussi a_{ml} dans $P(E_2)$ avec $i \neq m$, alors de E_1E_2 on pourrait déduire un facteur $a_{ki}a_{ml}$ dans un mot de $L(E)$, contredisant $L(E) = L(\mathcal{A}_n)$.

Définition 1.46 (Couverture d'un mot)**.** Une expression rationnelle E *couvre* un mot u de Σ^+ si $u \in \text{Fact}(L(E))$, où Fact(L) dénote l'ensemble des facteurs de L.

Définition 1.47 (Index d'un mot)**.** L'*index* $I_u(E)$ d'un mot u dans une expression E est la plus grande valeur de m telle que E couvre u^m. Si $I_u(E) = \infty$, alors on dit que E est u-infinie, et sinon qu'elle est u-finie.

Lemme 1.48. *Soit u un mot de Σ^+ et E une expression rationnelle sur Σ. Si E est u-finie, alors*

$$I_u(E) \leq |E|$$

Démonstration. On vérifie en général

$$\begin{aligned} I_u(\emptyset) &= 0 \\ I_u(\varepsilon) &= 0 \\ I_u(a) &\leq 1 \\ I_u(E_1 + E_2) &= \max(I_u(E_1), I_u(E_2)) \\ I_u(E_1E_2) &\leq I_u(E_1) + I_u(E_2) + 1 \\ I_u(E^*) &= \sup\{I_u(E^n) \mid n \geq 0\} \ . \end{aligned}$$

Le seul point potentiellement surprenant est le $+1$ dans l'inégalité pour E_1E_2, qui provient de la possibilité de découper u en u_1u_2, et d'avoir $u^{I_u(E_1)}u_1$ dans Suff$(L(E_1))$ et $u_2u^{I_u(E_2)}$ dans Pref$(L(E_2))$.

L'expression de $I_u(E^*)$ dissimule en fait deux cas, selon que $I_u(E^*) = \infty$ ou que $I_u(E^*) \leq I_u(E) + 1$. Cette remarque permet de conclure. □

On déduit la borne cherchée de la proposition suivante.

Proposition 1.49. *Il existe une boucle u dans $\mathcal{A}_n$ passant par l'état 1 telle que, pour toute expression E couvrant u, $|E| \geq 2^n$.*

Démonstration. On procède par induction sur n. Dans $\mathcal{A}_1$, la seule boucle possible est celle sur a_{11}, avec pour expression $E = a_{11}^*$ de taille 2. Supposons maintenant que l'on ait trouvé une boucle u dans $\mathcal{A}_{n-1}$ vérifiant l'énoncé, i.e. que pour toute expression E_{n-1} couvrant u, $|E_{n-1}| \geq 2^{n-1}$.

Dans l'automate $\mathcal{A}_n$, pour tout k de Q_n, on considère les chemins u_k, permutations circulaires de u qui commencent et finissent en l'état k. Par exemple, si $u = a_{11}a_{13}a_{34}a_{45}a_{51}$ dans $\mathcal{A}_5$, alors dans $\mathcal{A}_6$ on aura

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}a_{13}a_{34}a_{45}a_{51} = u \\ u_2 &= a_{22}a_{24}a_{45}a_{56}a_{62} \\ u_3 &= a_{33}a_{35}a_{56}a_{61}a_{13} \\ u_4 &= a_{44}a_{46}a_{61}a_{12}a_{24} \\ &\dots \end{aligned}$$

On vérifie ainsi que u_k boucle sur k mais ne passe pas par l'état $k-1$.

Considérons à présent la boucle

$$w = u_1^{2^n} a_{12} u_2^{2^n} a_{23} \cdots u_n^{2^n} a_{n1} \ .$$

Soit E une expression couvrant w. Par définition de w, pour tout k, $I_{u_k}(E) \geq 2^n$, et donc par le lemme 1.48, soit $|E| \geq 2^n$ et nous avons notre preuve, soit E est u_k-infinie.

Dans ce dernier cas, pour chaque k, on peut trouver des sous-expressions F_k^* de sub(E) minimales (pour l'ordre « sous-expression de ») telles que ces F_k^* soit elles aussi u_k-infinies et couvrent u_k. On considère alors parmis ces sous-expressions

- un état $j = i(E_1^*)$ pour l'une de ces sous-expressions E_1^* couvrant un certain chemin u_k, et
- une autre sous-expression E_2 pour la boucle $u_{(j \mod n)+1}$, qui par définition étiquette un chemin qui ne passe pas par j.

On observe que, si l'on substitue ε pour E_1 dans E (et donc indirectement dans E_2), alors E_2 couvre toujours $u_{(j \mod n)+1}$.

Dès lors,

$\|E_2^*\| \geq 2^{n-1}$	après substitution, par hyp. d'ind. puisque E_2^* couvre $u_{(j \mod n)+1}$
$\|E_1^*\| \geq 2^{n-1}$	avant substitution, par hyp. d'ind. puisque E_1^* couvre u_k
$\|E\| \geq 2^n$	avant substitution

□

1.3 Minimisation

C.f. [Car08, sec. 1.7], [Sak03, sec. I.3.3], [Aut94, ch. 6], [HU79, sec. 3.4].

Morphismes d'automates Nous allons souvent utiliser dans cette section la notion de morphisme d'automates :

Définition 1.50 (Morphisme d'automates)**.** Un *morphisme d'automates* $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ entre deux automates $\mathcal{A}_1 = \langle \Sigma, Q_1, I_1, F_1, \delta_1 \rangle$ et $\mathcal{A}_2 = \langle \Sigma, Q_2, I_2, F_2, \delta_2 \rangle$ est une fonction de Q_1 dans Q_2 qui vérifie

1. $\varphi(I_1) \subseteq I_2$,
2. $\varphi(F_1) \subseteq F_2$ et
3. si (q, a, q') est une transition de δ_1, alors $(\varphi(q), a, \varphi(q'))$ est une transition de δ_2.

C.f. [Sak03, chap. II.3].

On obtient par induction le lemme suivant :

Lemme 1.51. *Soit $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ un morphisme d'automates. Alors $L(\mathcal{A}_1) \subseteq L(\mathcal{A}_2)$.*

Une condition garantissant l'équivalence des langages d'un automate et de son image par un morphisme d'automate est la surjectivité, définie par :

Définition 1.52. Un morphisme d'automates $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ est *localement surjectif* si

1. pour tout q de I_2, il existe q' dans I_1 tel que $\varphi(q') = q$ et q' soit dans F_1 si q est dans F_2, et
2. pour tout état q de Q_1, et toute transition $(\varphi(q), a, q')$ de δ_2, il existe une transition (q, a, q'') de δ_1 telle que $q' = \varphi(q'')$ et q'' soit dans F_1 si q' est dans F_2.

À noter que dans le cas d'automates déterministes complets, la surjectivité locale de φ se résume à demander que $\varphi(q) \in F_2$ implique $q \in F_1$ pour tout q de Q_1.

Lemme 1.53. *Si $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ est un morphisme localement surjectif d'automates, alors $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$.*

La surjectivité locale n'interdit pas d'avoir des états non accessibles dans Q_2 sans antécédent dans Q_1.

Démonstration. D'après le lemme 1.51, il ne nous reste qu'à montrer que $L(\mathcal{A}_2) \subseteq L(\mathcal{A}_1)$. Soit donc une exécution de $\mathcal{A}_2$

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \cdots q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n$$

avec q_0 dans I_2 et q_n dans F_2. On montre par récurrence sur i de 0 à n qu'il existe une exécution de $\mathcal{A}_1$

$$q'_0 \xrightarrow{a_1} q'_1 \xrightarrow{a_2} q'_2 \cdots q'_{i-1} \xrightarrow{a_i} q'_i$$

avec q'_0 dans I_1 et $\varphi(q'_i) = q_i$. Tout d'abord, comme $\varphi(I_1) = I_2$, il existe bien un antécédent $q'_0 \in I_1$ pour q_0 par φ. Puis, s'il existe une telle exécution dans $\mathcal{A}_1$ jusqu'à q'_i, alors comme $(\varphi(q'_i), a, q_{i+1})$ appartient à δ_2, il existe (q'_i, a, q'_{i+1}) dans δ_1 avec $q_{i+1} = \varphi(q'_{i+1})$.

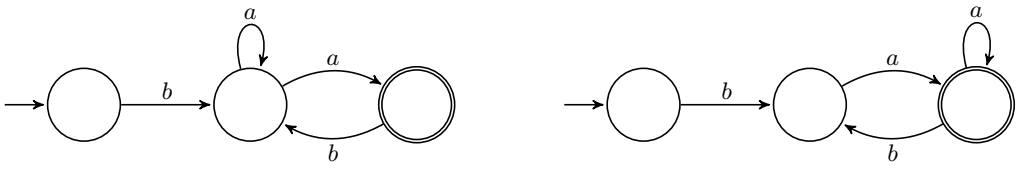
Il ne nous reste plus pour conclure qu'à rappeler que si q_n est dans F_2, alors l'état q'_n fourni par l'induction précédente est lui dans F_1, et donc que le mot $a_1 \cdots a_n$ est accepté par $\mathcal{A}_1$. □

Enfin, un morphisme d'automates est surjectif s'il est localement surjectif et si $\varphi(Q_1) = Q_2$. On définit un morphisme injectif de manière duale. En particulier, deux automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont *isomorphes* s'il existe un morphisme bijectif de $\mathcal{A}_1$ à $\mathcal{A}_2$.

Les automates finis déterministes ont une forme minimale *canonique* modulo isomorphisme. Ce résultat est à comparer à l'absence d'un tel automate canonique dans le cas non déterministe.

Même en l'absence d'une forme canonique, il est intéressant de minimiser des automates non déterministes. Ce problème a été montré PSPACE*-complet par* JIANG *et* RAVIKUMAR *[1993].*

Exemple 1.54. Le langage décrit par l'expression $(ba^+)^+$ est reconnu par les deux automates non isomorphes suivants :



On pourrait énumérer modulo isomorphisme tous les automates avec deux états, ou trois états et trois transitions, et vérifier qu'il n'en existe aucun qui reconnaisse ce langage.

1.3.1 Automate des quotients

C.f. [Car08, déf. 1.83], [Sak03, p. 121], [Aut94, p. 64], [BEAUQUIER et al., 1992, p. 312].

Rappelons que $w^{-1}L = \{u \in \Sigma^* \mid wu \in L\}$ est le quotient à gauche (ou *résiduel*) de $L \subseteq \Sigma^*$ par $w \in \Sigma^*$, et notons $L_q = \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q, w) \cap F \neq \emptyset\}$ pour un état q d'un automate $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \delta \rangle$. On a les équations

$$v^{-1}u^{-1}L = (uv)^{-1}L$$
$$L_q = \bigcup_{a \in \Sigma} \bigcup_{(q,a,q') \in \delta} \{a\} L_{q'}$$

pour tout u, v de Σ^*, $L \subseteq \Sigma^*$, et q de Q.

Lemme 1.55. *Soit $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ un automate déterministe, q un état de Q, et w un mot de Σ^*. Si $\delta^*(q_0, w) = q$, alors $L_q = w^{-1}L$.*

Démonstration. Par récurrence sur $|w|$: initialement, $L_{q_0} = L = \varepsilon^{-1}L$, puis pour $w = ua$ avec u dans Σ^* et a dans Σ, et $q_0 \xrightarrow{u} q' \xrightarrow{a} q$, par hypothèse de récurrence $L_{q'} = u^{-1}L$ et on vérifie bien $L_q = a^{-1}L_{q'} = a^{-1}u^{-1}L = (ua)^{-1}L$ puisque l'automate est déterministe. □

Le lemme 1.55 permet de majorer le nombre de quotients à gauche d'un langage reconnaissable ; en particulier, ce nombre est fini.

Corollaire 1.56. *Soit $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ un automate déterministe complet. Le nombre de quotients à gauche de $L(\mathcal{A})$ est inférieur à $|Q|$.*

Nous introduisons maintenant un automate particulier dont les états sont des langages sur Σ, et plus précisément les quotients à gauche de L par Σ^* :

Définition 1.57 (Automate des quotients)**.** L'*automate des quotients* d'un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est $\mathcal{A}_L = \langle \Sigma, Q_L, L, F_L, \delta_L \rangle$ défini par

$$Q_L = \{w^{-1}L \mid w \in \Sigma^*\}$$
$$F_L = \{w^{-1}L \mid \varepsilon \in w^{-1}L\} = \{w^{-1}L \mid w \in L\}$$
$$\delta_L = \{(w^{-1}L, a, (wa)^{-1}L) \mid w \in \Sigma^*, a \in \Sigma\}$$

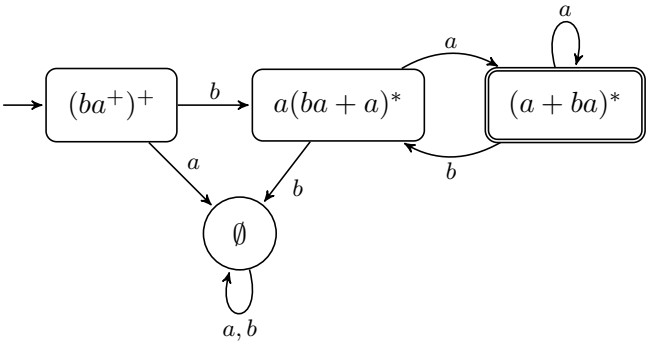
On déduit de cette définition que $\mathcal{A}_L$ est un automate déterministe complet accessible. On vérifie aisément dans $\mathcal{A}_L$ que $\delta^*(L, w) = w^{-1}L$, et donc que $L(\mathcal{A}_L) = L$. Par le corollaire 1.56, si L est reconnaissable, alors $\mathcal{A}_L$ est fini et minimal.

Une autre démarche pour ces résultats est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 1.58. *Soit $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ un automate déterministe complet reconnaissant L et $\mathcal{A}_L = \langle \Sigma, Q_L, L, F_L, \delta_L \rangle$ l'automate des quotients associé. La fonction $\varphi : Q \to Q_L, q \mapsto L_q$ est un morphisme surjectif d'automates.*

Démonstration. Tout d'abord, φ est bien un morphisme d'automates : $\varphi(q_0) = L$, $\varphi(F) = F_L$, et si (q, a, q') est une transition de δ, alors $(L_q, a, L_{q'})$ est une transition de δ_L. De plus, φ est localement surjectif, puisque, encore une fois $\varphi(q_0) = L$ et, comme $\mathcal{A}$ est complet, pour toute transition $(L_q, a, w^{-1}L)$ de δ_L il existe une transition (q, a, q') de δ telle que $L_{q'} = w^{-1}L$, et $q' \in F$ si $L_{q'} \in F_L$. Enfin, puisque $\mathcal{A}_L$ est accessible, $\varphi(Q) = Q_L$, donc φ est surjectif. □

Exemple 1.59. Les quotients à gauche du langage L de l'expression $(ba^+)^+$ sont L, $\emptyset$, $L(a(ba + a)^*)$ et $L((a + ba)^*)$, ce qui fournit l'automate $\mathcal{A}_L$ suivant :



1.3.2 Algorithme par renversement de BRZOZOWSKI

C.f. BRZOZOWSKI *[1963] et [Sak03, p. 125].*

Voici un résultat bien utile pour démontrer qu'un automate que l'on vient de déterminiser est minimal (c.f. l'automate de l'exemple 1.14) :

Proposition 1.60. *Le déterminisé d'un automate co-déterministe co-accessible qui reconnaît L est minimal.*

Démonstration. Soient $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, \{q_f\}, \delta \rangle$ un automate co-déterministe et co-accessible qui reconnaît L, et $\mathcal{A}_d = \langle \Sigma, 2^Q, I, F, \delta \rangle$ son déterminisé. Montrons que le morphisme $\varphi : 2^Q \to Q_L$ est injectif, i.e. que si $u^{-1}L = v^{-1}L$ pour deux mots de Σ^*, alors $\delta^*(I, u) = \delta^*(I, v)$. On aura ainsi montré que $\mathcal{A}_d$ est isomorphe à l'automate minimal $\mathcal{A}_L$.

Supposons $u^{-1}L = v^{-1}L$ et soit un état p de $\delta^*(I, u)$, montrons qu'il appartient aussi à l'ensemble $\delta^*(I, v)$. Comme $\mathcal{A}$ est co-accessible, il existe un mot w de Σ^* tel que q_f appartienne à $\delta^*(p, w)$. Donc uw et vw appartiennent à L. Comme $\mathcal{A}$ est co-déterministe, p est l'unique état tel que q_f appartienne à $\delta^*(p, w)$, donc p appartient aussi à $\delta^*(I, v)$.

Symmétriquement, on prouve aussi $\delta^*(I, v) \subseteq \delta^*(I, u)$. □

On en déduit un algorithme extrêmement simple pour minimiser un automate (y compris un automate non déterministe) : calculer l'automate transposé, le déterminiser, prendre son transposé (on a alors un automate co-accessible et co-déterministe), et déterminiser à nouveau :

$$\mathcal{A}_L = \det(\mathrm{tr}(\det(\mathrm{tr}(\mathcal{A})))) \ .$$

Une transposition se fait en temps linéaire, une déterminisation en temps exponentiel. A priori, cet algorithme travaille donc en temps $O(2^{2^n})$. Cependant, comme

l'automate final est minimal, on sait qu'il est plus petit que $\det(\mathcal{A})$, donc de taille au pire $O(2^n)$. L'argument est donc le suivant : le coût d'une déterminisation est en $O(|\mathcal{A}| + |\det(\mathcal{A})|)$, l'automate intermédiaire $\mathrm{tr}(\det(\mathrm{tr}(\mathcal{A})))$ est de taille $O(2^n)$, et l'automate final aussi, d'où une complexité totale en $O(2^n)$.

Cette complexité est particulièrement intéressante si $\mathcal{A}$ est initialement non déterministe, puisque les autres algorithmes de minimisation doivent commencer par une déterminisation. En pratique, même dans le cas où $\mathcal{A}$ est déterministe, cet algorithme reste performant.

1.3.3 Congruence de NERODE

C.f. [Car08, sec. 1.7.2], [Sak03, déf. I.3.3], [Aut94, p. 60], [BEAUQUIER et al., 1992, p. 315].

Définition 1.61 (Congruence)**.** Soit $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ un automate déterministe, et $\sim$ une relation d'équivalence sur Q. Cette relation est une *congruence* si elle est compatible avec les transitions de $\mathcal{A}$:

$$q \sim q' \text{ implique } \forall a \in \Sigma, \delta(q, a) \sim \delta(q', a) \tag{1.6}$$

et si elle sature $\mathcal{A}$:

$$q \sim q' \text{ implique } q \in F \text{ ssi } q' \in F \tag{1.7}$$

pour tous états q, q' de Q.

Notons $[q]$ pour la classe d'équivalence de l'état q.

Définition 1.62 (Quotient)**.** Soit $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ un automate déterministe et $\sim$ une équivalence sur Q. L'*automate quotient* de $\mathcal{A}$ par $\sim$ est l'automate $\mathcal{A}/\!\sim = \langle \Sigma, Q/\!\sim, [q_0], \{[q_f] \mid q_f \in F\}, \delta/\!\sim\}$ avec

$$\delta/\!\sim = \{([q], a, [\delta(q, a)]) \mid q \in Q, a \in \Sigma\} .$$

Observons que $\mathcal{A}/\!\sim$ est déterministe et complet.

Lemme 1.63. *Soit $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ un automate déterministe et $\sim$ une congruence sur Q. L'automate quotient $\mathcal{A}/\!\sim$ reconnaît $L(\mathcal{A})$.*

Démonstration. L'inclusion $L(\mathcal{A}) \subseteq L(\mathcal{A}/\!\sim)$ est immédiate pour toute équivalence $\sim$. Soit maintenant $w = a_1 \cdots a_n \in L(\mathcal{A}/\!\sim)$, reconnu par une exécution

$$[q_0] \xrightarrow{a_1} [q_1] \to \cdots \xrightarrow{a_n} [q_n]$$

avec $q_n \sim q_f$ pour un état final q_f de F. En particulier, cette exécution ne passe pas par la classe d'équivalence vide (qui sert d'état puit).

On montre par récurrence sur n que w étiquette une exécution de $\mathcal{A}$

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q'_1 \to \cdots \xrightarrow{a_n} q'_n$$

avec $q'_i \sim q_i$ pour chaque i de 1 à n. C'est vrai par (1.6) pour $i = 1$, et de même pour l'hypothèse de récurrence.

Enfin, $q'_n \sim q_n \sim q_f$ pour un certain état final q_f (avec $q'_n = q_0$ si $w = \varepsilon$), et par la propriété de saturation (1.7), $q'_n \in F$, donc w est bien dans $L(\mathcal{A})$. □

Définition 1.64 (Congruence de NERODE)**.** Soit $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ un automate déterministe. On appelle la relation d'équivalence $\cong$ suivante la *congruence de* NERODE :

$$q \cong q' \text{ ssi } L_q = L_{q'}$$

pour tous états q, q' de Q.

Sans surprise, la congruence de NERODE est bien une congruence au sens de la définition 1.61. La définition de $\cong$ donne immédiatement :

Proposition 1.65. *Soit $\mathcal{A}$ un automate déterministe complet pour L. Alors $\mathcal{A}/\cong$ est isomorphe à $\mathcal{A}_L$.*

1.3.4 Algorithme de MOORE

C.f. [Car08, sec. 1.7.3], [Sak03, proposition I.3.12], [Aut94, p. 61], [HU79, sec. 3.4], [BEAUQUIER et al., 1992, p. 318].

La proposition 1.65 suggère un moyen de calculer l'automate minimal, en opérant à des raffinements successifs d'une congruence jusqu'à obtenir la congruence de NERODE.

Définition 1.66. Soit $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ un automate déterministe. On définit $\cong_i$ sur Q par

$$q \cong_0 q' \text{ ssi } (q \in F \text{ ssi } q' \in F) \tag{1.8}$$

$$q \cong_{i+1} q' \text{ ssi } q \cong_i q' \text{ et } \forall a \in \Sigma, \delta(q,a) \cong_i \delta(q',a) \tag{1.9}$$

pour tous états q, q' de Q.

Proposition 1.67. *Il existe k tel que $\cong_k = \cong_{k+j}$ pour tout $j \geq 0$, et tel que $\cong_k = \cong$.*

Démonstration. On vérifie par récurrence que $\cong \subseteq \cong_i$ pour tout $i \geq 0$: $\cong \subseteq \cong_0$ est vérifié puisque $L_q = L_{q'}$ implique $q \in F$ ssi $q' \in F$, puis $L_q = L_{q'}$ implique $q \cong_i q'$ par hypothèse de récurrence, et pour tout a de Σ, $L_{\delta(q,a)} = L_{\delta(q',a)}$, donc encore par hypothèse de récurrence $\delta(q,a) \cong_i \delta(q',a)$.

Notons que $\cong_{i+1} \subseteq \cong_i$ pour tout i, donc $\cong_{i+1}$ est d'index supérieur à celui de $\cong_i$, mais d'index inférieur à celui de $\cong$, qui est le nombre (fini) d'états de l'automate minimal. Donc il existe k tel que $\cong_k = \cong_{k+1} = \cong_{k+j}$ pour tout $j \geq 0$.

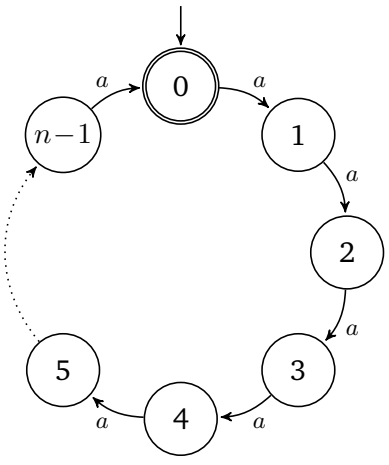
Il reste à montrer que $\cong_k \subseteq \cong$. Soient q et q' deux états de Q tels que $q \cong_k q'$, et $w = a_1 \cdots a_n$ dans L_q. Alors il existe deux exécutions dans $\mathcal{A}$

$$q \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} q_n \qquad\qquad q' \xrightarrow{a_1} q'_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} q'_n$$

avec $q_j \cong_k q'_j$ pour tout $j \geq 1$ par (1.9), et $q_n \in F$ ssi $q'_n \in F$ par (1.8), donc w est aussi dans $L_{q'}$. Cela montre $L_q \subseteq L_{q'}$, et on démontre de même l'inclusion inverse. □

L'algorithme de MOORE consiste alors à calculer les partitions successives de Q par $\cong_i$.

Exemple 1.68. L'algorithme de MOORE travaille en temps $O(n^2)$ dans le pire des cas, que l'on peut rencontrer avec l'automate suivant, qui reconnaît le langage $\{a^m \mid m = 0 \mod n\}$:



La partition initiale est

$$Q/\cong_0 = \{\{0\}, \{1, \ldots, n-1\}\}$$

puis pour chaque i

$$Q/\cong_i = \{\{0\}, \{1, \ldots, n-i-1\}, \{n-i\}, \ldots, \{n-1\}\}$$

et enfin pour $i = n-1$

$$Q/\cong = \{\{0\}, \{1\}, \ldots, \{n-1\}\} .$$

Notons des résultats récents qui ont prouvé que l'algorithme de Moore travaille en temps moyen $O(n \log\log n)$ sur des automates complets déterministes.

C.f. DAVID *[2010].*

Il existe une version optimisée par HOPCROFT de cet algorithme, qui utilise une technique de diviser pour régner, en $O(n \log n)$. En pratique, elle est en fait moins efficace !

1.3.5 Monoïde syntaxique

C.f. [Car08, sec. 1.11], [Sak03, p. 256] et [Aut94, p. 47].

On a étudié jusque-là des caractérisations des langages rationnels grâce aux automates et aux expressions rationnelles. On s'intéresse dans cette section à une troisième façon plus algébrique de définir ces langages. Cette vision algébrique nous permettra de visualiser la minimisation d'un automate sous un nouveau jour.

Rappelons pour commencer les définitions de monoïdes et de morphisme de monoïdes.

Définition 1.69 (Monoïde)**.** On appelle *monoïde* tout ensemble M muni d'une loi de composition interne $\times_M$ associative (*i.e.* $\forall a, b, c \in M\ (a \times_M b) \times_M c = a \times_M (b \times_M c)$) qui possède un élément neutre 1_M (*i.e.* $\forall a \in M\ a \times_M 1_M = 1_M \times_M a = a$). On s'autorise dans la suite à noter ab le produit $a \times_M b$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur le monoïde utilisé.

Si M et M' sont deux monoïdes, on appelle *morphisme* de M dans M' toute application $\mu : M \longrightarrow M'$ qui vérifie :
- $\mu(1_M) = 1_{M'}$;
- pour tous éléments a et b de M, $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$.

Exemple 1.70. Si Σ est un alphabet fini, l'ensemble Σ^* muni de la concaténation est un monoïde. L'ensemble $\mathbb{N}$ muni de l'addition est un monoïde. L'application $w \mapsto |w|$ est un morphisme de Σ^* dans $\mathbb{N}$.

Remarquons que le monoïde Σ^* a un statut particulier. En effet, toute fonction $\mu : \Sigma \longrightarrow M$ de Σ dans un monoïde M se prolonge de façon unique en un morphisme de monoïde de Σ^* dans M. On appelle Σ^* le monoïde libre engendré par Σ. Cela donne immédiatement une nouvelle notion de langage reconnaissable.

Définition 1.71 (Reconnaissance par monoïde)**.** On dit qu'un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est reconnu par le morphisme $\mu : \Sigma^* \longrightarrow M$ s'il existe une partie P de M telle que $L = \mu^{-1}(P)$. Par extension, on dit qu'un monoïde M reconnaît le langage L s'il existe un morphisme $\mu : \Sigma^* \longrightarrow M$ qui reconnaît L.

Remarquez qu'on peut toujours choisir $P = \mu(L)$ lorsque μ reconnaît le langage L : ainsi, le morphisme $\mu : \Sigma^* \longrightarrow M$ reconnaît le langage L si et seulement si $L = \mu^{-1}(\mu(L))$. On commence par montrer que cette nouvelle définition de reconnaissance coïncide avec la définition émanant des automates, si l'on se restreint aux monoïdes finis.

Proposition 1.72. *Soit L un langage sur l'alphabet Σ. Alors L est reconnaissable si et seulement s'il est reconnu par un monoïde fini.*

Démonstration. Soit $\mu : \Sigma^* \longrightarrow M$ un morphisme de monoïdes, avec M monoïde fini, vérifiant $L = \mu^{-1}(\mu(L))$. L'automate $\langle \Sigma, M, \{1_M\}, \mu(L), \delta\rangle$ avec $\delta = \{(m, a, m\mu(a)) \mid m \in M, a \in \Sigma\}$ reconnaît le langage L, ce qui prouve une implication de la proposition.

Réciproquement, considérons $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \delta\rangle$ un automate reconnaissant le langage L. On définit le monoïde M_Q des relations binaires sur l'ensemble Q muni de la loi de composition interne définie pour deux relations binaires r, r' sur Q par

$$rr' = \{(a, c) \mid \exists b \in Q \quad (a, b) \in r \wedge (b, c) \in r'\}$$

L'application $\mu : \Sigma^* \longrightarrow M_Q$ définie par

$$\mu(w) = \{(q, q') \mid q' \in \delta^*(q, w)\}$$

est un morphisme de monoïdes. Son image $\mu(\Sigma^*)$ dans M_Q est appelée monoïde des transitions de l'automate $\mathcal{A}$. Si on pose $P = \{r \mid r \cap (I \times F) \neq \emptyset\}$, on vérifie que $L = \mu^{-1}(P)$. □

Cette définition algébrique de la rationalité permet de donner des preuves extrêmement élégantes de certaines propriétés de clôture des langages rationnels. Par exemple, il est aisé de reconnaître l'intersection de deux langages reconnaissables en définissant le *produit* de deux monoïdes. Les clôtures par substitution inverse (et donc morphisme et morphisme inverse) ainsi que par complément sont également facilitées. On verra dans la section 1.4.6 une utilisation de la reconnaissance par monoïde pour prouver que les automates boustrophédons reconnaissent exactement les langages rationnels.

C.f. [Sak03, p. 270]

Étudions finalement la contrepartie algébrique de la minimisation. On a vu précédemment que la minimisation d'un automate déterministe pouvait passer par la *fusion* de certains de ses états, équivalents pour une certaine congruence. On va ici aussi passer par une notion de congruence sur des monoïdes et la fusion d'états sera gérée par la divisibilité de monoïdes.

Définition 1.73 (Congruence de monoïde)**.** Une relation d'équivalence $\sim$ définie sur un monoïde M est appelée *congruence* (de monoïde) si pour tous a, a', b et b' dans M vérifiant $a \sim a'$ et $b \sim b'$, on a $ab \sim a'b'$. De manière équivalente, il suffit que pour tous $y, y' \in M$, l'implication $y \sim y' \Longrightarrow \forall x, z\ xyz \sim xy'z$ soit satisfaite.

Un monoïde M muni d'une congruence $\sim$ peut être *simplifié* en quotientant M par $\sim$: on obtient le monoïde quotient noté $M/\sim$ dont les éléments sont les classes d'équivalence de la relation $\sim$ (la classe de a dans le quotient est notée $[a]$) muni du produit $[a][b] = [ab]$. De manière équivalente, un monoïde M' est un quotient de M si et seulement s'il existe un morphisme surjectif $\pi : M \longrightarrow M'$.

Définition 1.74 (Congruence syntaxique)**.** Pour tout langage $L \subseteq \Sigma^*$, on appelle *contexte* de $w \in \Sigma^*$ l'ensemble $C(w) = \{(u, v) \in (\Sigma^*)^2 \mid uwv \in L\}$. La relation $\sim_L$ définie par

$$w \sim_L w' \Longleftrightarrow C(w) = C(w') \Longleftrightarrow \forall u, v \in \Sigma^* \quad (uwv \in L \Leftrightarrow uw'v \in L)$$

est appelée *congruence syntaxique* de L et le monoïde quotient $\Sigma^*/\sim_L$ est appelé *monoïde syntaxique* de L.

Lemme 1.75. *Pour tout langage L, le monoïde syntaxique $M(L)$ reconnaît L.*

Démonstration. Un mot w appartient à L si et seulement si son contexte $C(w)$ contient la paire $(\varepsilon, \varepsilon)$. Ainsi, si une classe de la congruence syntaxique contient un mot de L, elle est entièrement contenue dans L. L'application canonique de Σ^* dans $M(L) = \Sigma^*/\sim_L$ qui associe à tout mot w sa classe $[w]$ est un morphisme. Puisque $L = \bigcup_{w\in L}[w]$ d'après la remarque précédente, ce morphisme reconnaît L. □

Non seulement le monoïde syntaxique reconnaît le langage L mais en plus, il est *le plus petit monoïde* reconnaissant ce langage, comme on va le voir maintenant.

Définition 1.76 (Monoïde diviseur)**.** Un monoïde M est appelé *sous-monoïde* de M' lorsque $M \subseteq M'$ et si l'application identité de M dans M' est un morphisme de monoïdes. On dit que M *divise* M', et on note $M \lhd M'$ si M est un quotient d'un sous-monoïde M_1 de M'.

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{id} & M' \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ M & & \end{array}$$

Notons que la relation de division est une relation d'ordre sur l'ensemble des monoïdes finis.

Proposition 1.77. *Un monoïde M reconnaît un langage $L \subseteq \Sigma^*$ si et seulement si le monoïde syntaxique $M(L)$ divise M.*

Démonstration. Il est aisé de prouver que si un monoïde M reconnaît L et que M divise M', alors le monoïde M' reconnaît L. Cette remarque adjointe du résultat du lemme 1.75 prouve que si $M(L)$ divise M, alors M reconnaît le langage L.

Réciproquement, supposons que le monoïde M reconnaît L, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $\mu : \Sigma^* \longrightarrow M$ et une partie P de M tels que $L = \mu^{-1}(P)$. Soit π le morphisme canonique de Σ^* dans $M(L)$. Le monoïde $M' = \mu(\Sigma^*)$ est un sous-monoïde de M. On va montrer que $M(L)$ est un quotient de M' ce qui prouvera que $M(L)$ divise M.

Soient w et w' deux mots tels que $\mu(w) = \mu(w')$. Une paire (u, v) appartient alors au contexte $C(w)$ si $uwv \in L$, c'est-à-dire si $\mu(u)\mu(w)\mu(v) \in P$: ainsi, les contextes $C(w)$ et $C(w')$ sont égaux, et finalement $\pi(w) = \pi(w')$. Cela nous autorise à définir une fonction π' qui à tout élément $m = \mu(w)$ de M' associe $\pi'(m) = \pi(w)$. On vérifie alors que π' est un morphisme surjectif de M' dans $M(L)$.

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^* & \xrightarrow{\mu} & M' \subseteq M & & \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi} & \searrow{\scriptstyle \pi'} & & & \\ M(L) & & & & \end{array}$$

□

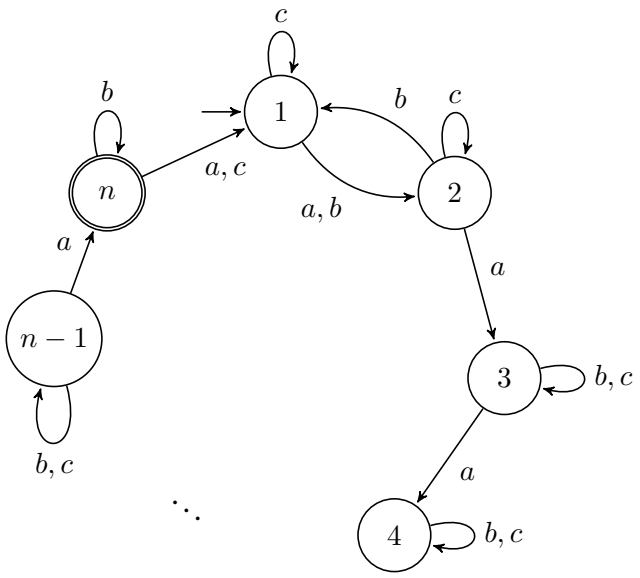
Finalement, on peut faire le lien entre automate minimal et monoïde syntaxique d'un langage rationnel.

Proposition 1.78. *Le monoïde syntaxique $M(L)$ d'un langage rationnel L est égal au monoïde des transitions de l'automate minimal de L.*

Démonstration. On note $\langle \Sigma, Q, \{i\}, F, \delta \rangle$ l'automate minimal de L. On sait, grâce à la preuve de la proposition 1.72, que le monoïde des transitions de l'automate minimal de L reconnaît L. Il est donc divisible par le monoïde syntaxique $M(L)$. Par ailleurs, soient deux mots w et w' ayant des images différentes dans le monoïde des transitions de l'automate minimal. Puisque cet automate est déterministe, il existe un état p tel que $\delta^*(p, w) = q$ et $\delta^*(p, w') = q'$ avec $q \neq q'$. Puisque cet automate est minimal, il existe un mot v tel que $\delta(q, v) \in F$ et $\delta(q', v) \notin F$ (ou l'inverse). L'automate étant émondé, il existe aussi un mot u tel que $\delta(i, u) = p$. On en déduit que la paire (u, v) appartient à $C(w)$ mais pas à $C(w')$ et donc que w et w' ont des images différentes dans le monoïde syntaxique de L. □

Cette remarque s'inspire de HOLZER *et* KÖNIG *[2004].*

Cependant, même si le monoïde syntaxique d'un langage est le plus petit monoïde le reconnaissant, il peut atteindre la taille n^n avec n le nombre d'états de l'automate minimal – lorsque l'alphabet est de taille supérieure à 3. L'automate suivant vérifie cette borne inférieure sur l'alphabet $\{a, b, c\}$:



On peut reformuler la reconnaissance par monoïde à l'aide de congruences sur le monoïde Σ^*. On dit qu'une congruence $\sim$ est d'*index fini* lorsqu'elle possède un nombre fini de classes d'équivalence, et qu'elle *sature* le langage $L \subseteq \Sigma^*$ si pour tous mots $w, w' \in \Sigma^*$, la relation $w \sim w'$ implique $w \in L \iff w' \in L$. Les propositions précédentes permettent donc de prouver : un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est rationnel si et seulement s'il est saturé par une congruence d'index fini.

1.4 Applications

Voici enfin quelques applications des automates finis et des expressions rationnelles. Les deux premières sont tellement classiques qu'elles sont même officiellement au programme de l'agrégation... mais on trouvera des exemples plus originaux dans les sections suivantes.

1.4.1 Localisation

Cette section reprend un chapitre de CROCHEMORE *et* HANCART *[1997] ; voir aussi* BEAUQUIER *et al. [1992, sec. 10.1.6, p. 354],* AHO *[1990] et [Sak03, sec. I.5.3].*

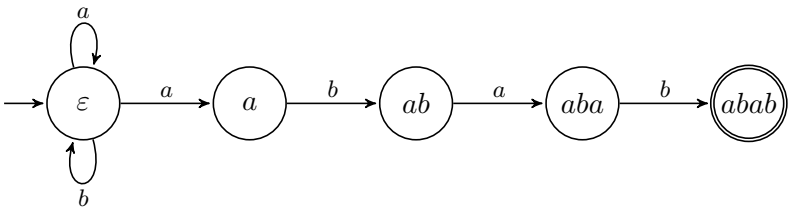
Sous cette dénomination se cachent de nombreuses applications, depuis la recherche d'une chaîne dans des fichiers (par exemple avec `grep`), jusqu'à celle de motifs approximatifs dans une séquence ADN. Pour limiter le champ de ces algorithmes de *pattern matching*, on se contente ici de la recherche d'un mot fini m dans un texte t sur un alphabet fini Σ connu à l'avance.

Algorithme 1.79.
LOCALISATION NAÏVE ($m = a_1 \cdots a_p$, $t = b_1 \cdots b_n$)

1. $i \leftarrow 1$ *(index courant dans m)*
2. $j \leftarrow 1$ *(index courant dans t)*
3. **tant que** $j \leq n$ **faire**
4. **tant que** $i \leq p \wedge j \leq n$ **faire**
5. **si** $a_i = b_j$ **alors**
6. $i \leftarrow i + 1$
7. $j \leftarrow j + 1$
8. **sinon**
9. $j \leftarrow j - i + 2$
10. $i \leftarrow 1$
11. **fin si**
12. **fin tant que**
13. **si** $i > p$ **alors**
14. **afficher** « motif trouvé en $b_{j-p+1} \cdots b_j$ »
15. $j \leftarrow j - i + 2$
16. $i \leftarrow 1$
17. **fin si**
18. **fin tant que**

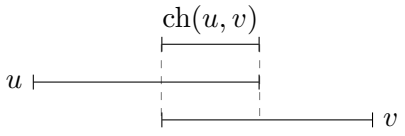
Cet algorithme fonctionne en temps $O(|m| \cdot |t|)$ et espace $O(|m|)$. On obtient un meilleur algorithme de localisation en utilisant un automate fini déterministe pour le langage $\Sigma^* m$: à chaque passage par son état final, on aura trouvé le motif recherché – une utilisation originale des états finaux.

Exemple 1.80. Un automate non déterministe pour le motif $abab$ sur $\{a, b\}^*$ est le suivant :

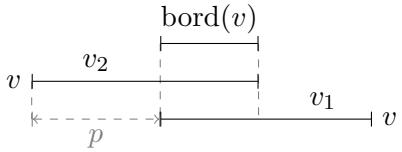


L'utilisation de bordures est aussi au cœur de l'algorithme de KNUTH *et al. [1977] qui travaille en temps $O(|m| + |t|)$ et espace $O(m)$. L'idée d'utiliser l'automate minimal pour $\Sigma^* m$ avec une transition par défaut est dûe à* SIMON *[1994].*

Définition 1.81 (Chevauchement, bordure, période)**.** Le *chevauchement* $\mathrm{ch}(u, v)$ de deux mots u et v est le plus long suffixe de u qui est un préfixe de v.



Un mot u est une *bordure* d'un mot v s'il est à la fois un préfixe et un suffixe de v, c'est-à-dire s'il existe v_1, v_2 dans Σ^* tels que $v = uv_1 = v_2u$. La bordure la plus longue de v différente de v est notée $\mathrm{bord}(v)$.



Une *période* d'un mot $v = a_1 \cdots a_n$ est un entier p entre 0 et n tel que, pour tout $1 \leq i \leq n - p$, $a_i = a_{i+p}$.

À noter que si un mot v a une bordure non vide, alors $|v| - |\mathrm{bord}(v)|$ est une période de v.

Lemme 1.82. *Pour tous mots u, v de Σ^* et tout symbole a de Σ,*

$$\mathrm{ch}(ua, v) = \begin{cases} \mathrm{ch}(u,v)a & \textit{si } \mathrm{ch}(u,v)a \textit{ est un préfixe de } v \\ \mathrm{bord}(\mathrm{ch}(u,v)a) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que $w_1 = \mathrm{ch}(ua, v)$ est une bordure de $w_2 a = \mathrm{ch}(u, v)a$. Comme w_1 est un suffixe de ua, deux cas sont possibles :

1. soit $w_1 = \varepsilon$ et alors c'est trivialement une bordure de $w_2 a$,
2. soit $w_1 = w_1' a$ et d'une part $ua = u_1 w_1' a$ et $v = w_1' a v_1$ et d'autre part $u = u_2 w_2$ et $v = w_2 v_2$ pour u_1, u_2, v_1, v_2 appropriés. On voit alors que w_1' est à la fois suffixe de u et préfixe de v, donc c'est une bordure de w_2 (qui est par définition le *plus long* suffixe de v et préfixe de u). Par suite $w_1 = w_1' a$ est un suffixe de $w_2 a$, et comme l'ordre préfixe est linéaire, soit w_2 est un préfixe strict de $w_1' a$ mais alors $w_1' = w_2$ et donc $w_1' a$ est bien préfixe de $w_2 a$, soit $w_1' a$ est un préfixe large de w_2 et donc de $w_2 a$.

Il reste à montrer le lemme : si $w_2 a$ est un préfixe de v, alors c'est aussi un suffixe de ua maximal (sinon w_2 ne serait pas maximal). Sinon, si $w_2 a$ n'est pas un préfixe de v, alors d'une part $w_1 \neq w_2 a$ et d'autre part si w est une bordure stricte de $w_2 a$ alors w est un suffixe de ua et un préfixe de w_2 lui-même préfixe de v donc est une bordure de w_1. □

Définition 1.83 (Automate d'un motif)**.** On définit pour un motif m de Σ^* la *fonction de retour* r_m par

$$r_m(ua) = \begin{cases} ua & \text{si } ua \text{ est un préfixe de } m \\ \mathrm{bord}(ua) & \text{sinon} \end{cases}$$

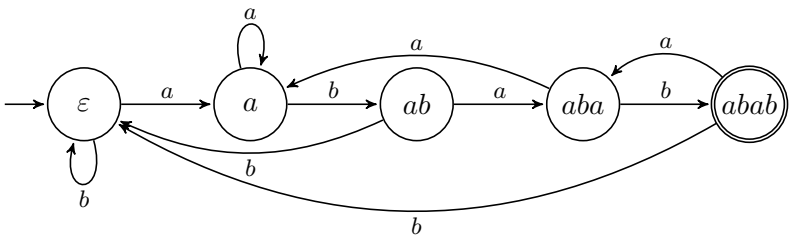
pour tout préfixe u de m et tout symbole a de Σ.

L'*automate du motif* m sur Σ^* est l'automate fini

$$\mathcal{A}_m = \langle \Sigma, \mathrm{Pref}(m), \varepsilon, \{m\}, \{(u, a, r_m(ua)) \mid u \in \mathrm{Pref}(m), a \in \Sigma\} \rangle$$

où $\mathrm{Pref}(m)$ est l'ensemble des préfixes de m.

Exemple 1.84. L'automate du motif $abab$ sur $\{a, b\}^*$ est le suivant :



Proposition 1.85. *L'automate $\mathcal{A}_m$ d'un motif m est l'automate minimal pour le langage $\Sigma^* m$.*

Démonstration. Le fait que $\mathcal{A}_m$ soit déterministe et complet est immédiat d'après les définitions.

Par récurrence sur la longueur du mot u de Σ^*, on montre que

$$\delta^*(\varepsilon, u) = \mathrm{ch}(u, m)$$

dans $\mathcal{A}_m$. C'est vrai pour $u = \varepsilon = \mathrm{ch}(\varepsilon, m)$, et pour $\delta(\mathrm{ch}(u, m), a) = \mathrm{ch}(ua, m)$ par le lemme 1.82. En prenant $u = vm$ avec v dans Σ^*,

$$\delta^*(\epsilon, vm) = \mathrm{ch}(vm, m) = m$$

d'où l'on déduit que $L(\mathcal{A}_m) = \Sigma^* m$.

L'automate $\mathcal{A}_m$ est de plus minimal puisque les langages acceptés depuis chaque état sont bien différents : soient u_1 et u_2 deux préfixes différents de $m = u_1 v_1 = u_2 v_2$; on peut supposer $|u_1| < |u_2|$ et donc $|v_1| > |v_2|$, alors v_2 ne peut pas être dans le langage accepté à partir de l'état u_1, sinon $u_1 v_2$ de longueur inférieure à $|m|$ serait accepté par l'automate entier. □

Voir l'algorithme de minimisation par renversement de BRZOZOWSKI *en section 1.3.2.*

On notera que l'automate d'un motif est exactement le déterminisé de l'automate non déterministe « naturel » pour $\Sigma^* m$: ce dernier étant co-déterministe, sa déterminisation donne bien un automate minimal (c.f. l'automate non déterministe de l'exemple 1.80, et son déterminisé minimal dans l'exemple 1.84).

L'automate d'un motif m a exactement $|m| + 1$ états et $|\Sigma| \cdot |m|$ transitions. Une fois l'automate construit, on sait donc effectuer la recherche d'un motif m dans un texte t en temps $O(|\Sigma| \cdot |m| + |t|)$ et espace $O(|\Sigma| \cdot |m|)$. Ce n'est pas encore très bon, du fait du facteur $|\Sigma|$ dans la taille de l'automate. La solution est d'utiliser un automate avec les transitions vers l'état ε laissées implicites : dans l'algorithme de reconnaissance d'un mot par un automate déterministe, on ira alors en l'état ε au lieu de rejeter le mot si une transition n'est pas prévue par l'automate. On tire ainsi parti de la propriété suivante sur les automates de motif.

Proposition 1.86. *Une transition (u, a, ε) d'un automate de motif est dite* triviale. *Si $\mathcal{A}_m$ est un automate de motif pour m, alors il contient au plus $2|m|$ transitions non triviales.*

Démonstration. Les transitions de la forme (u, a, ua) dans $\mathcal{A}_m$ pour u un préfixe de $m = a_1 \cdots a_p$ sont au nombre de $p = |m|$; il nous reste à montrer qu'il y a au plus $|m|$ transitions de la forme $(u, a, \mathrm{bord}(ua))$ avec $\mathrm{bord}(ua) \neq \varepsilon$. On considère pour cela la différence $|u| - |\mathrm{bord}(ua)| \leq |m|$. Supposons qu'il existe deux telles transitions différentes $(u_1, a, \mathrm{bord}(u_1 a))$ et $(u_2, b, \mathrm{bord}(u_2 b))$ telles que

$$|u_1| - |\mathrm{bord}(u_1 a)| = |u_2| - |\mathrm{bord}(u_2 b)| \,. \tag{1.10}$$

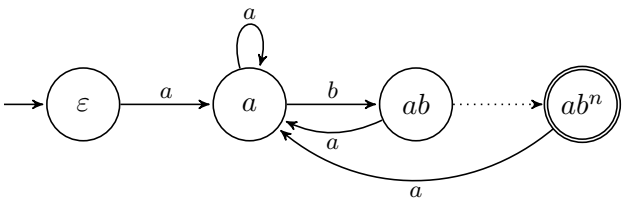
Si $u_1 = u_2$, alors d'après (1.10), $\mathrm{bord}(u_1 a) = \mathrm{bord}(u_2 b)$, qui implique à son tour $a = b$, en contradiction avec le fait que ces deux transitions devaient être différentes.

Si $|u_1| > |u_2|$ et donc $|\mathrm{bord}(u_1a)| > |\mathrm{bord}(u_2b)|$, alors

$$\begin{aligned}
b &= a_{|\mathrm{bord}(u_2b)|} && \text{puisque } \mathrm{bord}(u_2b) \neq \varepsilon \\
&= a_{|\mathrm{bord}(u_2b)|+|u_1|-|\mathrm{bord}(u_1a)|+1} && \text{puisque } \mathrm{bord}(u_1a) \neq \varepsilon \\
& && \text{donc } |u_1a| - |\mathrm{bord}(u_1a)| \text{ une période de } u_1a \\
& && \text{donc } |u_1| - |\mathrm{bord}(u_1a)| + 1 \text{ une période de } u_1a \\
&= a_{|\mathrm{bord}(u_2b)|+|u_2|-|\mathrm{bord}(u_2b)|+1} && \text{par (1.10)} \\
&= a_{|u_2|+1}
\end{aligned}$$

Ce qui contredit le fait que u_2b n'était pas un préfixe de m. □

Exemple 1.87. Une borne de $2|m|$ transitions non triviales est atteinte par l'automate pour le motif ab^n : pour $0 \leq i \leq n$, chaque état ab^i a une transition par a vers l'état a.

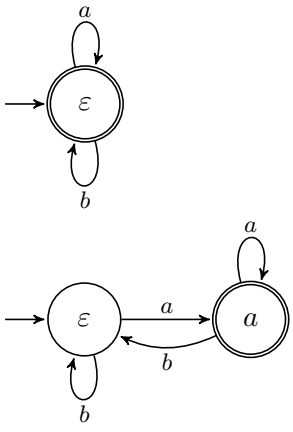


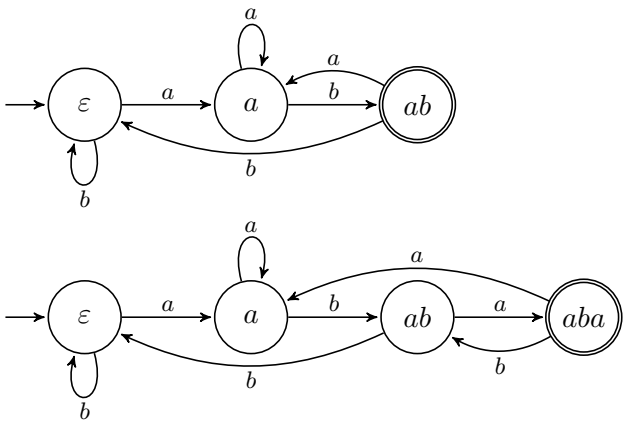
Il ne nous reste plus pour conclure cette section qu'à donner un algorithme pour construire $\mathcal{A}_m$ sans ses transitions triviales en temps et espace $O(|m|)$. L'idée de cette construction est la suivante : en partant d'un automate reconnaissant Σ^*, on « déplie » les transitions qui vont composer le motif m lettre par lettre. L'état atteint par l'ancienne transition est utilisé pour calculer les transitions depuis le nouvel état. L'utilisation de transitions par défaut est ensuite une simple adaptation.

Lemme 1.88. *Soit δ_m l'ensemble des transitions de l'automate $\mathcal{A}_m$ sur Σ. On a pour tout u de Σ^* et a de Σ :*

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon &= \{(\varepsilon, b, \varepsilon) \mid b \in \Sigma\} \\
\delta_{ua} &= \delta'_{ua} \cup \delta''_{ua} \\
\delta'_{ua} &= \{(u, a, ua)\} \cup (\delta_u \backslash \{(u, a, r_u(ua))\}) \\
\delta''_{ua} &= \{(ua, b, v) \mid (r_u(ua), b, v) \in \delta'_{ua}, b \in \Sigma\}
\end{aligned}$$

Exemple 1.89. La construction incrémentale de l'automate pour $abab$ de l'exemple 1.84 passe par les étapes suivantes avant d'obtenir l'automate du motif :



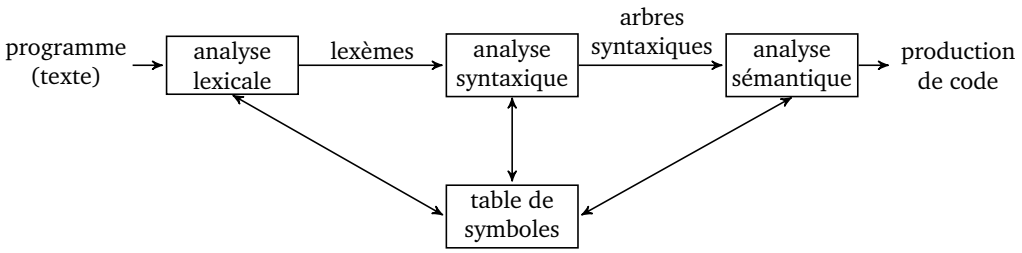


1.4.2 Analyse lexicale

C.f. [GBJL00, sec. 2.1], [SSS88, sec. 3.6], [ASU86, ch. 3], [HU79, sec. 2.8].

Une autre application des automates finis est l'analyse lexicale, ici du point de vue des langages de programmation et dans le contexte de la compilation de programmes. Comme dans le cas de la recherche de motif, les automates sont utilisés de manière non standard : il n'est pas besoin d'être à la fin de l'entrée pour s'intéresser aux états finaux rencontrés, au contraire on souhaite repérer à quels moments cela se produit. Cependant, et c'est là que l'affaire se corse par rapport aux algorithmes de localisation, on veut trouver un *découpage* du texte d'entrée à l'aide de tels états finaux, et comme plusieurs découpages sont généralement possibles, quelques acrobaties deviennent nécessaires...

Rappelons d'abord le schéma général de la *partie avant* d'un compilateur :



1. L'*analyseur lexical* reconnaît les composants élémentaires de la syntaxe, par exemple les mots-clefs, opérateurs, commentaires, etc. Le résultat est une séquence de lexèmes (ou *tokens*) qui sont passés à
2. l'*analyseur syntaxique*, qui vérifie que le programme est syntaxiquement correct et construit un arbre de syntaxe (abstrait) à partir des lexèmes ; enfin
3. l'*analyseur sémantique* statique vérifie le bon typage du programme.

Arrivé à ce point, un compilateur enchaîne encore typiquement plusieurs phases d'analyse statique pour optimiser le code machine qu'il va produire, ce qui constitue sa *partie arrière*. Les trois phases de la partie avant maintiennent généralement une *table des symboles*, contenant les noms des identificateurs, les types utilisateurs, les opérateurs surchargés, etc.

Exemple 1.90. Voici quelques-unes des expressions rationnelles utilisées pour l'analyse lexicale du langage C, et la façon de les noter dans un générateur d'analyseurs lexicaux comme `flex` :

mots clefs dont `int` ou `if`, notés

$$E_{\texttt{if}} = \texttt{if}$$
$$E_{\texttt{int}} = \texttt{int}$$

symboles comme =, + ou ;

$$E_{=} = \texttt{=}$$
$$E_{+} = \texttt{+}$$
$$E_{;} = \texttt{;}$$

La notation `[...]` représente un ensemble de caractères (parmi un alphabet comme la table ASCII), et `[^...]` l'ensemble de caractères complémentaire. Ces caractères peuvent être échappés, comme `\n` pour un retour à la ligne, et on peut considérer tout un intervalle de la table ASCII, comme `a-f` pour toutes les lettres de `a` à `f`.

blancs les caractères d'espace, de tabulation, de retour à la ligne etc., notés

$$E_{\text{space}} = \texttt{[\textbackslash n\textbackslash r\textbackslash t]+}$$

identifiants des séquences de lettres et de chiffres, notés

$$E_{\text{id}} = \texttt{[\_a-zA-Z][\_0-9a-zA-Z]*}$$

nombres entiers dans plusieurs bases possibles, de type long ou non, signés ou non, notés

$$E_{\text{ic}} = \texttt{([1-9][0-9]*|0[0-7]*|0x[0-9a-fA-F]+)[lLuU]?}$$

chaînes commencent et finissent par ", avec des caractères d'échappement, notées

$$E_{\text{sc}} = \texttt{"([\^{}"]|\textbackslash\textbackslash")*"}$$

...

L'idée à partir d'une telle collection d'expressions rationnelles $(E_i)_i$ est de construire un automate fini reconnaissant l'union de leurs langages, et de l'utiliser pour segmenter le texte d'entrée.

Par exemple, l'analyse lexicale d'un texte d'entrée

```
int a = 12;
int b = 3 + a;
```

va retourner une séquence de lexèmes, qui correspondent chacun à une expression rationnelle, et qui constituent un découpage de la chaîne d'entrée :

‘int’ ‘space’ ‘id’ ‘space’ ‘=’ ‘space’ ‘ic’ ‘;’ ‘space’
‘int’ ‘space’ ‘id’ ‘space’ ‘=’ ‘space’ ‘ic’ ‘space’ ‘+’ ‘space’ ‘id’ ‘;’

On peut observer que ce découpage n'est pas sans problème, puisque

1. `int` est à la fois dans $L(E_{\texttt{int}})$ et $L(E_{\text{id}})$, ce que l'on résout habituellement en donnant la priorité au premier choix,
2. on pourrait aussi diviser `12` en deux lexèmes ‘ic’, l'un pour `1` et l'autre pour `2`, ce que l'on résout en prenant toujours le segment le plus long possible.

Un automate fini déterministe pour les expressions rationnelles données en exemple est donné en Figure 1.1. On peut noter qu'il étiquette ses états finaux avec les expressions rationnelles identifiées en ce point, et qu'il incorpore déjà la priorité des mots clefs sur les identifiants.

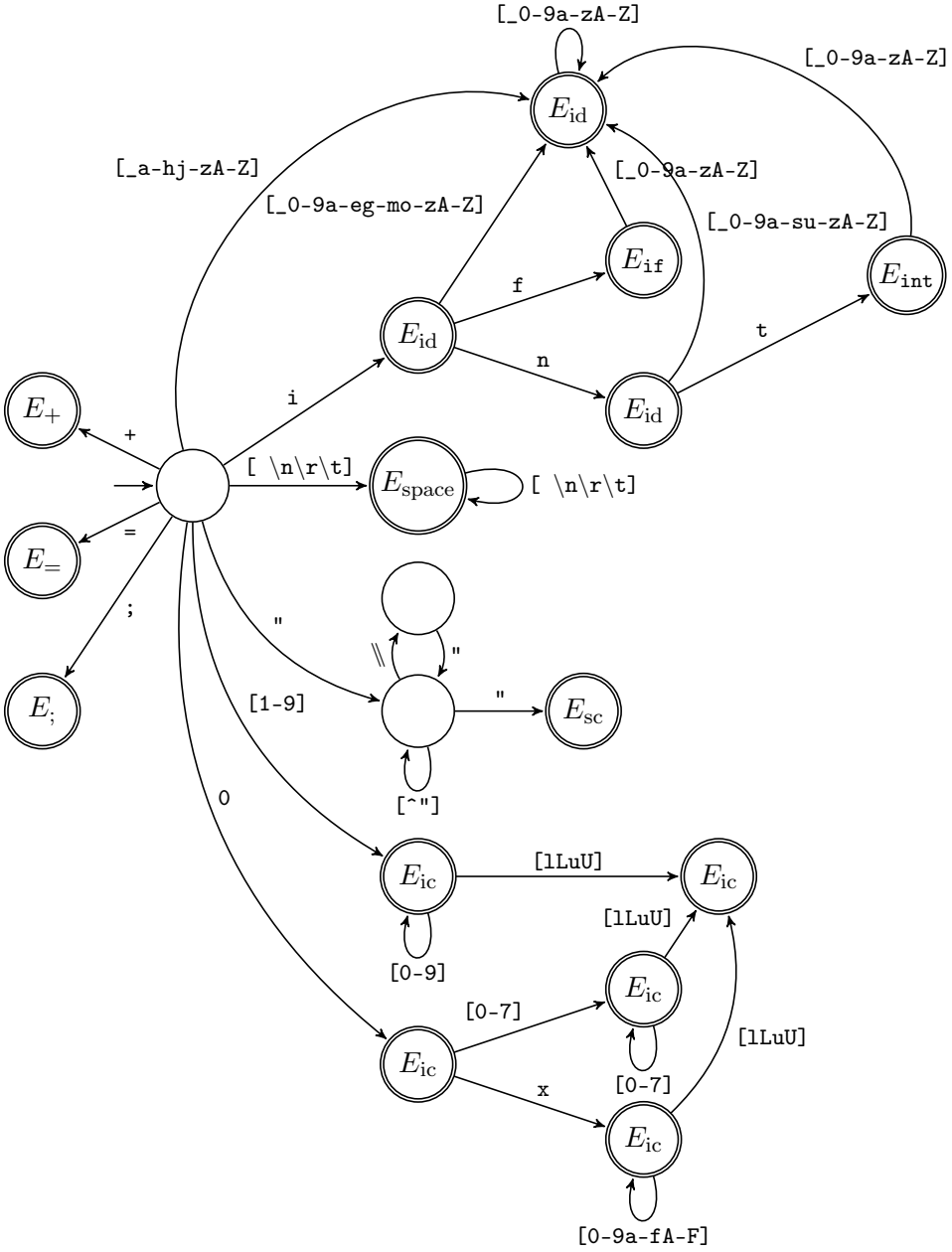


FIGURE 1.1 – Analyse lexicale par un automate déterministe.

Algorithme naïf Le principe de l'algorithme naïf d'analyse lexicale est de simuler un automate déterministe $\mathcal{A}$ pour le langage $L(\sum_{i=1}^{p} E_i) = \bigcup_{i=1}^{p} L(E_i)$, comme celui représenté ci-dessus, sur le texte d'entrée w de Σ^*.

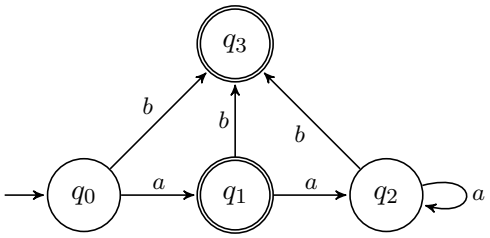
Quand il rencontre un état final, l'algorithme ne peut généralement pas immédiatement annoncer avoir trouvé un lexème, puisqu'en lisant plus, il pourrait en trouver un plus long. Il faut donc mémoriser ce dernier état final q_f rencontré et sa position j dans le texte, et continuer la recherche d'un lexème plus long. Quand on ne peut appliquer aucune transition de l'automate, on utilise cet état final (par exemple en affichant l'index de l'expression rationnelle qui vient d'être identifiée, donné par une fonction f de F dans $\{1, \ldots, p\}$), et on reprend l'analyse depuis la position j mémorisée.

Algorithme 1.91.
ANALYSE LEXICALE NAÏVE ($\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle, f : F \to \{1, \ldots, p\}, w = a_1 \cdots a_n$)

1. $q \leftarrow q_0$ *(état courant)*
2. $i \leftarrow 1$ *(index courant dans w)*
3. **tant que** $i \leq n$ **faire**
4. $\quad q_f \leftarrow \bot$ *(dernier état final rencontré)*
5. $\quad$ **tant que** $i \leq n \wedge \delta(q, a_i) \neq \emptyset$ **faire**
6. $\quad\quad$ **si** $q \in F$ **alors**
7. $\quad\quad\quad q_f \leftarrow q$
8. $\quad\quad\quad j \leftarrow i$
9. $\quad\quad$ **fin si**
10. $\quad\quad q \leftarrow \delta(q, a_i)$
11. $\quad\quad i \leftarrow i + 1$
12. $\quad$ **fin tant que**
13. $\quad$ **si** $q \in F$ **alors**
14. $\quad\quad q_f \leftarrow q$
15. $\quad\quad j \leftarrow i$
16. $\quad$ **fin si**
17. $\quad$ **si** $q_f = \bot$ **alors**
18. $\quad\quad$ **retourner** échec
19. $\quad$ **fin si**
20. $\quad$ **afficher** $f(q_f)$
21. $\quad i \leftarrow j$
22. **fin tant que**
23. **retourner** succès

Cet algorithme simple souffre cependant d'un défaut : il travaille en temps $O(n^2)$ dans le pire des cas. Comme les fichiers à analyser peuvent être de taille conséquente (par exemple en C par le truchement des `#include`), cette complexité n'est pas acceptable.

Exemple 1.92. Considérons deux expressions rationnelles $E_1 = a$ et $E_2 = a^*b$, pour lesquelles on peut construire l'automate déterministe suivant, associé à la fonction $f : q_1 \mapsto 1, q_3 \mapsto 2$:



Sur le texte d'entrée $w = a^n$, l'algorithme 1.91 va afficher 1^n, mais au prix d'une inspection de la totalité du texte depuis chacune des n positions de départ.

Notons enfin qu'il est nécessaire que ε n'appartienne à aucun langage d'expression E_i si l'on veut garantir la terminaison…

C.f. REPS *[1998], et [GBJL00, sec. 2.1.6.7, p. 85].*

Algorithme par programmation dynamique Une solution à cette complexité excessive est d'adopter un algorithme par *programmation dynamique*. L'idée est d'exprimer une solution au problème d'identifier un segment de longueur maximale à partir d'un état q de l'automate depuis une position i dans le mot d'entrée

$w = a_1 \cdots a_n$ à l'aide d'autres calculs pour q' un état de Q et de la position $i+1$. Ces calculs ne dépendent pas du contexte dans lequel ils sont effectués (*transparence référentielle* : une expression peut être remplacée par son résultat), et sont en nombre polynomial $|Q| \cdot (n+1)$:

$$T(q, n+1) = \begin{cases} (\bot, 0) & \text{si } q \notin F \\ (q, n+1) & \text{sinon} \end{cases}$$

et pour $i \leq n$,

$$T(q,i) = \begin{cases} (\bot, 0) & \text{si } \delta(q, a_i) = \emptyset \text{ et } q \notin F \\ (q, i) & \text{si } \delta(q, a_i) = \emptyset \text{ et } q \in F \\ (q, i) & \text{si } \delta(q, a_i) = q',\ T(q', i+1) = (\bot, 0) \text{ et } q \in F \\ T(q', i+1) & \text{si } \delta(q, a_i) = q' \text{ sinon.} \end{cases}$$

On peut calculer $T(Q, \{1, \ldots, n+1\})$ de manière systématique (en considérant successivement des positions décroissantes de w), en temps linéaire $\Theta(|Q| \cdot |w|)$. On reconstruit ensuite la segmentation en lisant $T(q_0, i)$ pour les positions adéquates du texte d'entrée w :

On peut aisément modifier le calcul de T pour travailler sur un automate non déterministe, ce qui fait davantage ressortir le côté « programmation dynamique », puisqu'un calcul de $T(q,i)$ dépend alors de plusieurs calculs $T(q_j, i+1)$ avec $q_j \in \delta(q, a_i)$. De plus, la complexité reste en $O(|\mathcal{A}| \cdot |w|)$, sans avoir à payer le coût de la déterminisation.

Algorithme 1.93.
ANALYSE LEXICALE ($\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle, f : F \to \{1, \ldots, p\}, w = a_1 \cdots a_n$)

1. $i \leftarrow 1$
2. **tant que** $i \leq n$ **faire**
3. $\quad (q_f, i) \leftarrow T(q_0, i)$
4. $\quad$ **si** $q_f = \bot$ **alors**
5. $\quad\quad$ **retourner** échec
6. $\quad$ **fin si**
7. $\quad$ **afficher** $f(q_f)$
8. **fin tant que**
9. **retourner** succès

Une solution plus efficace utilise une approche par *mémoïsation* (ou *recensement*), et consiste à ne calculer que les valeurs utiles de $T(Q, \{1, \ldots, n+1\})$. Cette version paresseuse travaille alors en temps $O(|Q| \cdot |w|)$.

Exemple 1.94. Reprenons l'analyse de $w = a^n$ de l'exemple 1.92 : on a

$$T(q_0, 1) = T(q_1, 2) = (q_1, 2)$$

puisque

$$T(q_2, 3) = T(q_2, 4) = \cdots = T(q_2, n+1) = (\bot, 0)\ .$$

Une fois ce premier segment trouvé en temps $O(n)$, on peut relancer l'analyse lexicale avec $T(q_0, 2) = T(q_1, 3)$, pour lequel on pourra directement réutiliser la solution du calcul de $T(q_2, 4)$: les étapes ultérieures sont en $O(1)$ dans cet exemple.

1.4.3 Linguistique

Syntaxe Puisque les langages rationnels permettent une description finie d'un ensemble infini, on pourrait espérer représenter la totalité des phrases d'une langue

comme le français, en supposant tout de même un lexique fini et fixe. Cette idée d'employer des règles de dérivation formelles a été notamment explorée par Noam CHOMSKY [1956], et l'a amené à définir les différentes classes de grammaires qui composent maintenant la hiérarchie de CHOMSKY. Les grammaires de type 3 y sont équivalentes aux langages rationnels (voir la **??**). Cependant les langages rationnels sont inappropriés pour décrire la totalité d'une langue : en traduisant un exemple de CHOMSKY, un prédicat de la forme

$$\text{l'homme qui dit que } S \text{ arrive demain}$$

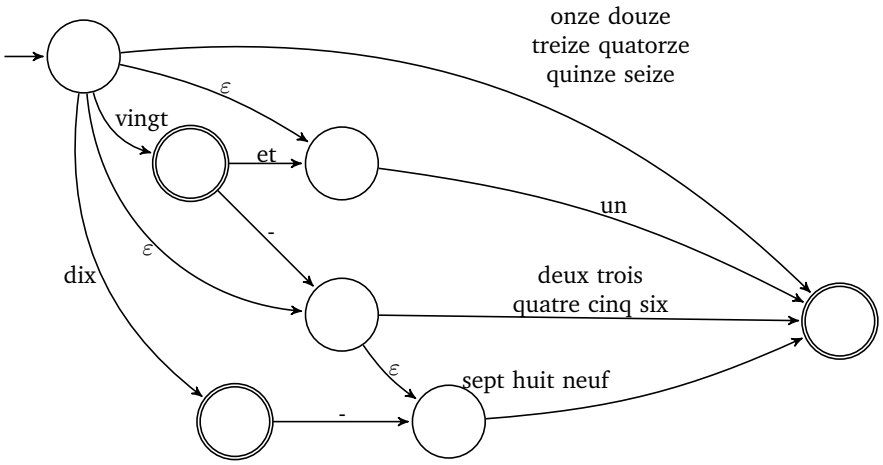
peut avoir n'importe quel prédicat à la place de S, y compris un prédicat de cette même forme. On arrive donc à un ensemble de phrases de la forme

$$(\text{l'homme qui dit que})^n S (\text{arrive demain})^n, n \geq 0$$

sur $\Sigma = \{$l'homme, qui, dit, que, arrive, demain$\}$. Un langage qui contient un tel sous-ensemble n'est pas rationnel – voici une application un peu originale des propriétés de clôture et des lemmes d'itération.

À défaut de modéliser l'intégralité du français, on peut néanmoins utiliser (avec succès) des automates finis et des expressions régulières pour des sous-langages : dates, nombres, etc.

Exemple 1.95. Voici un automate qui reconnaît les nombres de « un » à « vingt-neuf » :



Une analyse syntaxique simple, dite « de surface », peut aussi être effectuée sur des phrases entières, à l'aide de transducteurs ou de cascades de transducteurs, qui vont repérer les ensembles de mots qui forment des groupes nominaux ou des groupes verbaux par exemple. L'intérêt des automates réside alors dans leur bonne complexité d'analyse comparée à des formalismes plus complexes comme les grammaires algébriques, fournissant des analyses suffisantes pour certaines applications à moindre coût.

1.4.4 Théorie des codes

Cette section s'inspire des résultats de BERSTEL *et* PERRIN *[1985].*

La théorie des codes est au cœur de plusieurs disciplines (cryptographie, théorie de l'information, mathématiques, électrotechnique...) et son objectif est d'étudier des méthodes permettant de transmettre de données de manière efficace (compression de données) et fiable (codes correcteurs d'erreur). On se contente ici

de donner une vision des codes basées sur les automates. Après avoir donné la définition formelle d'un code sur un alphabet fini, on étudiera une méthode de reconnaissance des codes et on étudiera un type particulier de codes, les codes préfixes.

Définition 1.96 (Code)**.** Soit Σ un alphabet fini. Un sous-ensemble X de Σ^* est un *code* sur Σ si pour tous $n, m \geq 1$ et pour tous $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in X$, la condition $x_1 x_2 \cdots x_n = y_1 y_2 \cdots y_m$ implique $n = m$ et $x_i = y_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

En d'autres termes, un ensemble X est un code si tout mot de X^+ peut s'écrire de manière unique comme un produit de mots dans X. En particulier, un code ne contient jamais le mot vide. En terme d'encodage, on peut reformuler la définition d'un code comme suit :

Proposition 1.97. *Si un sous-ensemble X de Σ^* est un code, alors tout morphisme $\beta : A^* \to \Sigma^*$ qui induit une bijection d'un alphabet A sur X est injectif. Réciproquement, s'il existe un morphisme injectif $\beta : A^* \to \Sigma^*$ tel que $X = \beta(A)$, alors X est un code.*

Un tel morphisme injectif $\beta : A^* \to \Sigma^*$ vérifiant $X = \beta(A)$ est appelé *morphisme d'encodage* pour X : les mots de X encodent les lettres de l'alphabet A. La procédure d'encodage consiste à associer à un mot $a_1 \cdots a_n \in A^*$ ($a_i \in A$), qui est le message clair, le message chiffré $\beta(a_1) \cdots \beta(a_n)$. Le fait que β soit injectif assure que le message chiffré peut être décodé de manière unique pour retrouver le message originel.

Exemple 1.98. On fixe l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

- L'ensemble $X = \{aa, baa, ba\}$ est un code. En effet, supposons le contraire. Alors, il existe un mot $w \in X^+$, de longueur minimale, qui possède deux factorisations distincts $w = x_1 \cdots x_n = y_1 \cdots y_m$ ($n, m \geq 1, x_i, y_j \in X$). Comme w est de longueur minimale, on a $x_1 \neq y_1$: sans perte de généralité, on peut supposer que x_1 est un préfixe strict de y_1. Ceci implique nécessairement que $x_1 = ba$ et $y_1 = baa$. Par suite, on doit nécessairement avoir $x_2 = aa = y_2$. Ainsi, $y_1 = x_1 a$, $y_1 y_2 = x_1 x_2 a$ et si on suppose que $y_1 \cdots y_p = x_1 \cdots x_p a$, alors nécessairement $x_{p+1} = aa = y_{p+1}$, d'où on déduit $y_1 \cdots y_{p+1} = x_1 \cdots x_{p+1} a$. Ceci contredit l'existence de deux factorisations distinctes.
- L'ensemble $X = \{a, ab, ba\}$ n'est pas un code puisque le mot $w = aba$ possède deux factorisations distinctes $w = (ab)a = a(ba)$.
- Les ensembles $X = a^*b$ et $Y = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ sont des exemples de codes infinis, qu'on retrouvera lorsqu'on parlera de codes préfixes. En particulier, on remarque que X est un langage reconnaissable, alors que Y n'en est pas un.
- Pour tout alphabet, l'ensemble Σ^+ est un code.

On s'appuie sur la section I.3 de BERSTEL *et* PERRIN *[1985].*

Vérification d'un code Il n'est pas toujours facile de vérifier si un ensemble donné de mots est un code. On décrit ici un premier test, basé sur une organisation systématique des calculs requis pour vérifier qu'un ensemble de mots satisfait la définition d'un code.

Exemple 1.99. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. L'ensemble $X = \{aa, aabbb, abbaa, babb, bb\}$ n'est pas un code puisque le mot $w = aabbbabbaa$ a deux factorisations $(aabbb)(abbaa) =$

$w = (aa)(bb)(babb)(aa)$. Ces deux factorisations définissent une suite de préfixes de w, chacun correspondant à une tentative de double factorisation :

$$\begin{aligned}(aabbb) &= (aa)\mathbf{bbb}\\ (aabbb) &= (aa)(bb)\mathbf{b}\\ (aabbb)\mathbf{abb} &= (aa)(bb)(babb)\\ (aabbb)(abbaa) &= (aa)(bb)(babb)\mathbf{aa}\\ (aabbb)(abbaa) &= (aa)(bb)(babb)(aa)\end{aligned}$$

Chacune de ces tentatives, sauf la dernière, échoue, à cause du **reste** non vide.

Pour X un sous-ensemble (fini ou infini) de Σ^+, on pose

$$\begin{aligned}U_1 &= X^{-1}X\backslash\{\varepsilon\}\\ U_{n+1} &= X^{-1}U_n \cup U_n^{-1}X \quad \text{pour } n \geq 1\end{aligned}$$

Exemple 1.100. Dans l'exemple précédent, on a $U_1 = \{bbb\}$, $U_2 = \{b\}$, $U_3 = \{b, abb\}$, $U_4 = \{b, abb, aa\}$ et $U_5 = \{b, abb, aa, \varepsilon, bbb\}$.

Lemme 1.101. *Pour tout $n \geq 1$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\varepsilon \in U_n$ si et seulement s'il existe un mot $u \in U_k$ et des entiers $i, j \geq 0$ tels que*

$$uX^i \cap X^j \neq \varnothing \quad \textit{et} \quad i + j + k = n \tag{1.11}$$

Démonstration. On prouve ce résultat pour tout n, par récurrence forte descendante sur k. Si $k = n$, l'équivalence est triviale. Supposons donc que $n > k \geq 1$ et que l'équivalence est vraie pour $n, n-1, \ldots, k+1$.

Si $\varepsilon \in U_n$, par hypothèse de récurrence, il existe $v \in U_{k+1}$ et deux entiers $i, j \geq 0$ tels que $vX^i \cap X^j \neq \varnothing$ et $i + j + k + 1 = n$. Il y a donc des mots $x \in X^i$ et $y \in X^j$ tels que $vx = y$. Comme $v \in U_{k+1}$, deux cas se présentent.

- **1er cas.** $v \in X^{-1}U_k$: il existe un mot $z \in X$ tel que $zv = u \in U_k$. Alors $ux = zvx = zy$, d'où $uX^i \cap X^{j+1} \neq \varnothing$.
- **2ème cas.** $v \in U_k^{-1}X$: il existe un mot $z \in X$ et $u \in U_k$ tels que $z = uv$. Alors $zx = uvx = uy$, d'où $uX^j \cap X^{i+1} \neq \varnothing$.

Dans les deux cas, la formule 1.11 est satisfaite.

Réciproquement, si on suppose qu'il existe $u \in U_k$ et $i, j \geq 0$ vérifiant

$$uX^i \cap X^j \neq \varnothing \quad \text{et} \quad i + j + k = n$$

alors $ux_1 \cdots x_i = y_1 \cdots y_j$ pour des mots $x_r, y_s \in X$. Si $j = 0$, alors $i = 0$ et $k = n$. Donc $j \geq 1$. À nouveau, on distingue deux cas selon les longueurs respectives de u et y_1.

- **1er cas.** Si $u = y_1 v$ pour un mot $v \in \Sigma^+$, alors $v \in X^{-1}U_k \subseteq U_{k+1}$ et $vx_1 \cdots x_i = y_2 \cdots y_j$. Ainsi, $vX^i \cap X^{j-1} \neq \varnothing$ et par hypothèse de récurrence $\varepsilon \in U_n$.
- **2ème cas.** Si $y_1 = uv$ pour un mot $v \in \Sigma^+$, alors $v \in U_k^{-1}X \subseteq U_{k+1}$ et $x_1 \cdots x_i = vy_2 \cdots y_j$. Ainsi, $X^i \cap vX^{j-1} \neq \varnothing$ et par hypothèse de récurrence $\varepsilon \in U_n$. □

Finalement, on peut en déduire le théorème suivant

Théorème 1.102. *L'ensemble $X \subseteq \Sigma^+$ est un code si et seulement si aucun des ensembles U_n ne contient le mot vide.*

Démonstration. Si X n'est pas un code, alors il existe une égalité

$$x_1 x_2 \cdots x_p = y_1 y_2 \cdots y_q, \quad x_i, y_j \in X \quad \text{et} \quad x_1 \neq y_1$$

Sans perte de généralité, supposons que $|y_1| < |x_1|$. Alors $x_1 = y_1 u$ pour un mot $u \in A^+$. Dans ce cas, $u \in U_1$ et $uX^{p-1} \cap X^{q-1} \neq \varnothing$. D'après le lemme, $\varepsilon \in U_{p+q-1}$.

Réciproquement, si $\varepsilon \in U_n$, en prenant $k = 1$ dans le lemme, on sait qu'il existe $u \in U_1$ et des entiers $i, j \geq 0$ tels que $uX^i \cap X^j \neq \varnothing$. Le fait que $u \in U_1$ assure l'existence de $x, y \in X$ tels que $xu = y$. De plus, $x \neq y$ puisque $u \neq \varepsilon$. Ainsi, $xuX^i \cap xX^j \neq \varnothing$, ce qui entraîne $yX^i \cap xX^j \neq \varnothing$, puis que X n'est pas un code. □

Exemple 1.103. Dans l'exemple précédent, on déduit du fait que $\varepsilon \in U_5$ que X n'est pas un code. Pour $Y = \{aa, ba, bb, baa, bba\}$, on obtient $U_1 = \{a\}$ et $U_2 = U_1$. Ainsi, $U_n = \{a\}$ pour tout $n \geq 1$, donc X est un code.

Afin de transformer la condition nécessaire et suffisante du théorème précédent en un algorithme de vérification, considérons le cas où X est un langage reconnaissable.

Proposition 1.104. *Si $X \subseteq \Sigma^+$ est un langage reconnaissable, alors l'ensemble de tous les U_n ($n \geq 1$) est fini.*

Démonstration. Soit $\sim_X$ la congruence syntaxique du langage X (cf. définition 1.74) : le fait que X soit reconnaissable entraîne que celle-ci soit d'index fini. On définit un raffinement $\sim$ par $w \sim w'$ si $w = w' = \varepsilon$ ou bien si $w, w' \in \Sigma^+$ et $w \sim_X w'$. Il est clair que $\sim$ est à nouveau une congruence d'index fini.

De manière générale, si $\simeq$ est une congruence et si $L \subseteq \Sigma^*$ est une union de classes d'équivalence de $\simeq$, alors pour tout sous-ensemble Y de Σ^*, $Y^{-1}L$ est une union de classe d'équivalences de $\simeq$. En effet, soit $z \in Y^{-1}L$ et $z' \simeq z$. Il existe $y \in Y$ tel que $yz \in L$, d'où on déduit que $yz' \in L$. Ainsi $z' \in Y^{-1}L$.

On va ainsi prouver que chaque U_n est une union de classes d'équivalence de $\sim$, par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$, X est une union de classes de $\sim_X$, ainsi $X^{-1}X$ est aussi une union de classes de $\sim_X$, et il est facile de vérifier que $X^{-1}X \backslash \{\varepsilon\}$ est alors une union de classes de $\sim$. Par suite, si U_n est une union de classes de $\sim$, alors $U_n^{-1}X$ et $X^{-1}U_n$ sont tous deux des unions de classes de $\sim$. Donc il en est de même de leur réunion, U_{n+1}. □

La preuve précédente montre également que le nombre d'ensembles U_n différents est majoré par 2^{2^n} avec n le nombre d'états de l'automate minimal de X.

On décrit dans la suite un deuxième test, beaucoup plus efficace, basé sur des propriétés d'ambiguïté d'un automate. Soit $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \delta \rangle$ un automate sans ε-transition.

C.f. BERSTEL *et* PERRIN *[1985, sec. IV.1] et [Sak03, p. 81].*

Définition 1.105. Un automate émondé $\mathcal{A}$ est dit *non ambigu* si pour tout mot $w \in L(\mathcal{A})$, il existe un unique calcul réussi de $\mathcal{A}$ dont w est l'étiquette.

Commençons par décrire un algorithme permettant de tester si un automate est non ambigu. On définit le *carré* $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ d'un automate $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \delta \rangle$ par $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \langle \Sigma, Q \times Q, I \times I, F \times F, \delta' \rangle$ avec

$$((p_1, p_2), a, (q_1, q_2)) \in \delta' \iff (p_1, a, q_1), (p_2, a, q_2) \in \delta \ .$$

On appelle *diagonale* de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ le sous-automate $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ défini par la diagonale D de $Q \times Q$: $D = \{(q, q) \mid q \in Q\}$. Les états et les transitions de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$ sont en bijection, et donc ces deux automates sont équivalents.

Lemme 1.106. *Un automate émondé $\mathcal{A}$ est non ambigu si et seulement si la partie émondée de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ est la diagonale $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.*

Démonstration. Par définition, $\mathcal{A}$ est ambigu si et seulement s'il existe deux calculs réussis distincts c' et c'' de $\mathcal{A}$ qui ont même étiquette $w = a_1 a_2 \cdots a_n$:

$$c' = q'_0 \xrightarrow{a_1} q'_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} q'_n \qquad \text{et} \qquad c'' = q''_0 \xrightarrow{a_1} q''_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} q''_n$$

c'est-à-dire si et seulement s'il existe un calcul réussi c de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$:

$$c = (q'_0, q''_0) \xrightarrow{a_1} (q'_1, q''_1) \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} (q'_n, q''_n)$$

où, pour au moins un indice i, $0 \leq i \leq n$, on a : $q'_i \neq q''_i$ et donc si et seulement s'il existe un état accessible et coaccessible de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ en dehors de $\mathcal{D}$. □

En utilisant les résultats de la section 1.1.1, on peut donc tester en temps $O(|\mathcal{A}|^2)$ la non ambiguité d'un automate $\mathcal{A}$ (construction du carré puis utilisation de l'algorithme de TARJAN pour trouver les états accessibles et coaccessibles).

Décrivons maintenant comment relier cette notion d'ambiguité avec la théorie des codes. Pour un automate $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, I, F, \delta \rangle$ donné et un état $\omega \notin Q$, on peut construire un automate $\mathcal{B} = \langle \Sigma, Q \cup \{\omega\}, \{\omega\}, \{\omega\}, \delta' \rangle$ par

$$\begin{aligned} \delta' = \delta \cup \{(\omega, a, q) \mid \exists i \in I \quad (i, a, q) \in \delta\} \\ \cup \{(q, a, \omega) \mid \exists f \in F \quad (q, a, f) \in \delta\} \\ \cup \{(\omega, a, \omega) \mid \exists i \in I \, \exists f \in F \quad (i, a, f) \in \delta\} \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{A}^*$ la partie émondée de l'automate $\mathcal{B}$. Il est clair que ces deux automates reconnaissent le langage $L(\mathcal{A})^*$.

Théorème 1.107. *Soient $X \subseteq \Sigma^+$ et $\mathcal{A}$ un automate non ambigu reconnaissant le langage X. Alors X est un code si et seulement si $\mathcal{A}^*$ est non ambigu.*

Démonstration. X est un code sur si et seulement si pour tous $n, m \geq 1$ et pour tous $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in X$, la condition $x_1 x_2 \cdots x_n = y_1 y_2 \cdots y_m$ implique $n = m$ et $x_i = y_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. □

On obtient donc une procédure de vérification d'un code rationnel fonctionnant en temps $O(n2^n)$ avec n le nombre d'états d'un automate non ambigu (par exemple un automate déterministe) reconnaissant le langage X.

Codes préfixes Un ensemble $X \subseteq \Sigma^+$ est dit *préfixe* si aucun élément de X n'est un préfixe strict d'un autre élément de X.

Section II de BERSTEL *et* PERRIN *[1985]*

Proposition 1.108. *Tout ensemble préfixe de Σ^+ est un code.*

Démonstration. Si X n'est pas un code, alors il existe un mot w de longueur minimale ayant deux factorisations $x_1 \cdots x_n = w = y_1 \cdots y_m$ avec $x_i, y_j \in X$. Les deux mots x_1 et y_1 sont non vides et w ayant une longueur minimale, ils sont distincts. Dans ce cas, x_1 est un préfixe strict de y_1, ou vice-versa, ce qui contredit le fait que X soit préfixe. □

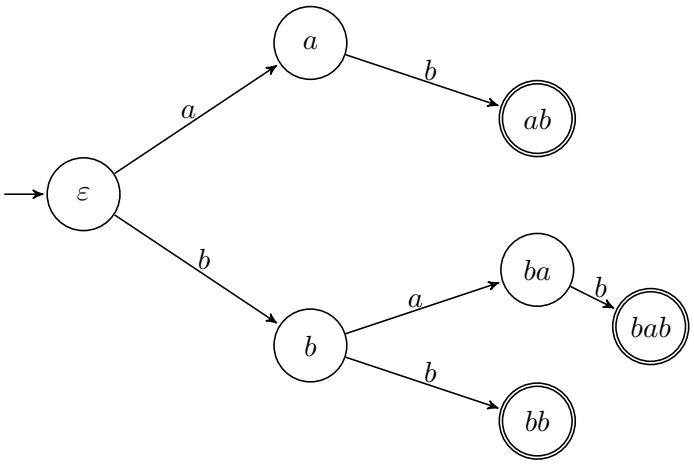
Les deux procédures de test développées précédemment fournissent des résultats particuliers dans le cas de codes préfixes. Dans le cas du premier test, l'ensemble $U_1 = X^{-1}X\backslash\{\varepsilon\}$ est directement égal à $\varnothing$, donc la procédure s'arrête immédiatement. Dans le cas du second test, l'automate $\mathcal{A}_X^*$ est alors déterministe : dans ce contexte, on s'aperçoit que les automates non ambigus sont aux automates déterministes, ce que les codes sont aux codes préfixes.

On peut aisément construire un automate reconnaissant un code préfixe fini X donné (on l'appelle *automate littéral*) : $\mathcal{A} = \langle \Sigma, X(\Sigma^+)^{-1} \cup X, \{\varepsilon\}, X\rangle, \delta$ où on définit les quotients à droite d'un langage par un mot $Lw^{-1} = \{u \in \Sigma^* \mid uw \in L\}$, et avec

$$(u, a, ua) \in \delta \quad \text{si } ua \in X(\Sigma^+)^{-1} \cup X \ .$$

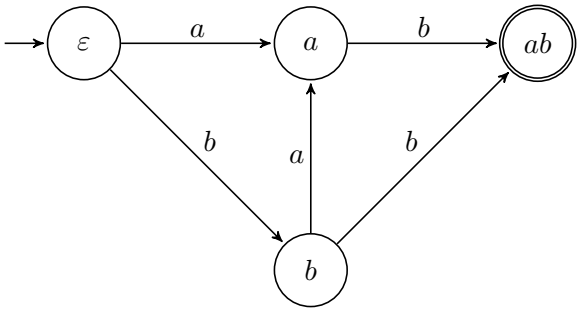
L'automate $\mathcal{A}$ est déterministe et reconnaît le langage X.

Exemple 1.109. L'automate littéral du code $X = \{ab, bab, bb\}$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ est donné par :



L'automate littéral d'un code préfixe est émondé mais n'est pas minimal en général. Pour le rendre minimal, il s'agit de fusionner les états u et v, s'ils vérifient $u^{-1}X = v^{-1}X$, c'est-à-dire si les deux *sous-arbres* enracinés en u et v respectivement sont identiques. Cela permet de décrire une procédure très simple pour le calcul de l'automate minimal : tout d'abord, tous les états acceptants sont étiquetés, par exemple avec l'étiquette 0. Si les étiquettes de 0 à i ont toutes été distribuées, on considère les sous-arbres tels que tous les états, sauf la racine, sont étiquetés. On étiquette alors les racines identiquement si et seulement si les sous-arbres étiquetés sont isomorphes. Si on fusionne les états selon leurs étiquettes, on obtient alors l'automate minimal.

Exemple 1.110. Sur le code préfixe $X = \{ab, bab, bb\}$ de l'exemple précédent, les trois états acceptants sont à fusionner, ainsi que les états a et ba puisque $a^{-1}X = (ba)^{-1}X = \{b\}$. Ainsi, l'automate minimal de X est :



Pour finir, remarquons que les codes préfixes sont très faciles à décoder : si on donne un mot $w \in X^+$, alors pour trouver l'unique décomposition $x_1x_2\cdots x_n$, avec pour tout j, $x_j \in X$, il suffit de parcourir l'automate minimal du code, en repartant de l'état initial à chaque fois qu'on passe par l'état acceptant.

Décodage Soit X un sous-ensemble de Σ^+. Alors X est dit *à délai de déchiffrage fini*, s'il existe un entier d positif tel que

$$\forall x, x' \in X \quad \forall y \in X^d \quad \forall u \in \Sigma^* \qquad xyu \in x'X^* \Longrightarrow x = x' \tag{1.12}$$

Si l'équation (1.12) est vraie pour un entier d, alors elle est aussi vérifiée pour tout entier $d' \geq d$. Si X est à délai de déchiffrage fini, alors le plus petit entier d satisfiant l'équation (1.12) est appelé *délai de déchiffrage* de X. Il est clair (et cela justifie la dénomination) que

Proposition 1.111. *Un sous-ensemble X de Σ^+ qui est à délai de déchiffrage fini est un code.*

Démonstration. Soit d le délai de déchiffrage de X. Si X n'est pas un code, alors il existe une égalité

$$w = x_1x_2\cdots x_n = y_1y_2\cdots y_m \qquad \text{avec } x_1 \neq y_1$$

où $n, m \geq 1$, $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in X$. Soit $z \in X$. Alors $wz^d \in y_1X^*$. D'après l'équation 1.12, on a donc $x_1 = y_1$, ce qui contredit l'hypothèse. □

La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.112. Le code $X = \{aa, ba, b\}$ possède un délai de déchiffrage infini. En effet, pour tout entier $d \geq 0$, le mot $b(aa)^d \in bX^d$ est un préfixe de $ba(aa)^d$ et $ba \neq b$.

Remarquons que les codes préfixes ont un délai de déchiffrage nul. Pour clore cette section sur les codes, on réalise une incursion rapide dans le monde des fonctions séquentielles.

C.f. [Sak03, sec. V.1.2] pour les définitions de base et les premières propriétés, et SCHÜTZENBERGER *[1977] pour l'article fondateur.*

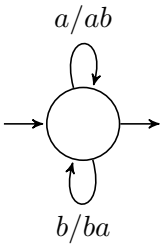
Définition 1.113 (Fonction séquentielle)**.** Un *automate séquentiel* est un tuple $\langle Q, \Sigma, A, i, \delta, \star, m, \rho\rangle$ où Q est un ensemble d'états, Σ un alphabet d'entrée, A un alphabet de sortie, i un état initial, $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ une fonction de transition, $\star : Q \times \Sigma \longrightarrow A^*$ une fonction de sortie, $m \in A^*$ un préfixe initial et $\rho : Q \longrightarrow A^*$ une fonction terminale. Un automate séquentiel génère des mots de A^* à partir

d'une entrée dans Σ^* (le préfixe initial et la fonction terminale sont concaténés respectivement au début et à la fin du mot généré). Un automate séquentiel est dit *séquentiel pur* si $m = \varepsilon$ et $\forall q \in Q\ \rho(q) = \varepsilon$.

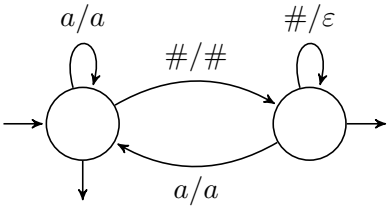
Un automate séquentiel (pur) définit une fonction $\varphi : \Sigma^* \longrightarrow A^*$. Une telle fonction est dite séquentielle (pure).

Les automates séquentiels purs sont des cas particuliers de transducteurs (définition 1.16), pour lesquels l'automate fini défini par la relation de transition est déterministe.

Exemple 1.114. L'automate séquentiel pur suivant reconnaît le morphisme $a \mapsto ab, b \mapsto ba$. On représente la fonction de transition et la fonction de sortie schématiquement : si $\delta(q, a) = q'$ et $\star(q, a) = \alpha$, on note $q \xrightarrow{a/\alpha} q'$.



L'automate séquentiel pur suivant remplace toute séquence d'espaces (encodé par le symbole $\#$) dans un texte de a par un seul espace.



Mentionnons qu'il existe des fonctions séquentielles non pures : par exemple, la fonction qui à un mot $w \in \{a, b\}^*$ associe $w(ab)^{-1}$ si ab est suffixe de w, et w sinon. On utilise dans la suite un morphisme d'encodage β d'un code : on rappelle qu'un tel morphisme est injectif, on peut donc aisément définir une fonction partielle inverse β^{-1}. On étudie les propriétés de cette fonction inverse.

Proposition 1.115. *Soit X un code fini de Σ^* et soit $\beta : A^* \longrightarrow \Sigma^*$ un morphisme d'encodage.*

1. *Si X est un code préfixe, alors β^{-1} est une fonction séquentielle pure.*
2. *X est un code à délai de déchiffrage fini si et seulement si β^{-1} est une fonction séquentielle.*

Démonstration.

1. On lit le mot d'entrée lettre après lettre et dès qu'on a lu un mot de X, on écrit sur la sortie la lettre de A correspondant à ce mot.
2. On procède par double implication. Supposons dans un premier temps que X est un code à délai de déchiffrage fini d. Soit $Q = \bigcup_{0 \leq i \leq (d+1) \max_{w \in X} |w|} \Sigma^i$. On définit sur cet ensemble d'états l'automate séquentiel $\langle Q, \Sigma, A, \varepsilon, \delta, \star, \varepsilon, \rho \rangle$ par

– si $p \leq d$, $x_1, \ldots, x_p \in X$ et $y \in \Sigma^*$ préfixe d'un mot de X : $\delta(x_1 \cdots x_p y, a) = x_1 \cdots x_p ya$ et $\star(x_1 \cdots x_p y, a) = \varepsilon$;
– si $x_1, \ldots, x_d \in X$ et $y \in \Sigma^* \backslash X$ préfixe d'un mot de X : $\delta(x_1 \cdots x_d y, a) = x_1 \cdots x_d ya$ et $\star(x_1 \cdots x_d y, a) = \varepsilon$;
– si $x_1, \ldots, x_d \in X$ et $y \in \Sigma^*$ tel que $ya \in X$: $\delta(x_1 \cdots x_d y, a) = x_2 \cdots x_d ya$ et $\star(x_1 \cdots x_d y, a) = \beta^{-1}(x_1)$;
– pour tout état $q \in Q \cap X$, $\rho(q) = \beta^{-1}(q)$.

Cet automate est bien un automate séquentiel : en particulier, la fonction de transition δ est déterministe. Il conserve une fenêtre finie de longueur au plus $(d+1)\max_{w \in X} |w|$ en mémoire puis décode le mot donné dès qu'il a suffisamment d'informations pour être certain du décodage.

Réciproquement, si la fonction β^{-1} est séquentielle, le décodage d'un chiffré se fait en simulant un automate séquentiel $\mathcal{A}$ reconnaissant β^{-1} sur cette entrée. Intuitivement, le délai de déchiffrage correspondra au nombre d'états dans la plus longue séquence de transitions telle que la fonction de sortie renvoie la chaîne vide. En effet, cette séquence correspond à une mise en mémoire d'une fenêtre du chiffré, et la première transition dont la fonction de sortie n'est pas vide correspond au déchiffrage d'un mot du code. Il s'agit donc de montrer qu'il n'existe pas dans $\mathcal{A}$ de séquence infinie de transitions dont la fonction de sortie renvoie la chaîne vide. Si c'était le cas, par l'absurde, cette séquence infinie contiendrait nécessairement un cycle et on trouverait donc (en pompant ce cycle) plusieurs chiffrés de Σ^* renvoyant le même clair de A^* : cela contredit l'hypothèse que X est un code. □

1.4.5 Décidabilité de l'arithmétique de PRESBURGER

On s'intéresse ici à la théorie logique du premier ordre des entiers munis de l'addition, mais pas de la multiplication. Plus précisément, on fixe un ensemble infini $\mathcal{X}$ de variables. On définit l'arithmétique de PRESBURGER, comme le plus petit ensemble $\mathcal{P}$ de formules logiques telles que

– si $x, y, z \in \mathcal{X}$ alors $x = 0$ et $x = y + z$ sont des formules de $\mathcal{P}$,
– si $x \in \mathcal{X}$ et $\varphi, \psi \in \mathcal{P}$, alors $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\neg\varphi$, $\forall x\ \varphi$ et $\exists x\ \varphi$ sont des formules de $\mathcal{P}$.

La sémantique de cette formule définit pour chaque formule φ et chaque ensemble fini de variable $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ qui contient les variables libres de la formule, un sous-ensemble de $\mathcal{V}$-assignations $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathcal{V}}$. On note $\mathrm{Free}(\varphi)$ l'ensemble des variables libres d'une formule φ. Si $\mathrm{Free}(\varphi) \subseteq \mathcal{V}$ et $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathcal{V}}$, on note $\sigma \vDash \varphi$ si la formule φ est vraie pour l'assignation σ. Par exemple, la formule $\exists y\ x = y + y$ s'évalue à vraie si et seulement si la variable x est envoyée sur un entier pair, et la formule

$$\forall y \forall z\ (x = y + z) \Rightarrow (y = 0 \vee z = 0)$$

s'évalue à vraie si et seulement si x est envoyée sur 1.

La question qui nous intéresse est de savoir si cette théorie est décidable, au sens qu'il est décidable si une formule close est valide, c'est-à-dire si sa sémantique est égale à l'ensemble réduit au tuple vide (plutôt que l'ensemble vide). La réponse est positive comme le montre le théorème suivant.

C.f. [Car08, Théorème 3.63], BOUDET *et* COMON *[1996].*

Théorème 1.116 (PRESBURGER 1929)**.** *La théorie $\mathcal{P}$ est décidable.*

Démonstration. On va montrer plus généralement que le *codage* de l'ensemble des valuations qui satisfont une formule φ de $\mathcal{P}$ est un langage reconnaissable.

Soit $\Sigma = \{0, 1\}$. On choisit de coder les entiers en binaire, avec bit de poids le plus fort à gauche. On définit une fonction de décodage $\nu : \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{N}$ par

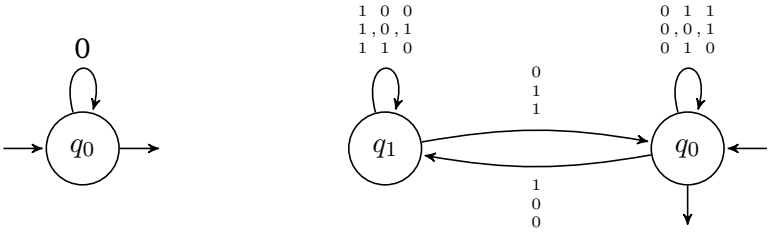
$$\nu(\varepsilon) = 0 \qquad \nu(w0) = 2\nu(w) \qquad \nu(w1) = 1 + 2\nu(w)$$

Remarquons que cette fonction est surjective, totale, mais non injective.

Soit $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ un ensemble fini de variables. Afin d'encoder des valuations, on définit l'alphabet $\Sigma_\mathcal{V}$ des $\mathcal{V}$-uplets de lettres dans Σ, i.e. $\Sigma_\mathcal{V} = \Sigma^\mathcal{V}$: remarquons que si $\mathcal{V} = \emptyset$, alors l'alphabet $\Sigma_\mathcal{V}$ est vide et donc l'ensemble des mots de $(\Sigma_\mathcal{V})^*$ est réduit au mot vide. Soit $w \in (\Sigma_\mathcal{V})^*$ un mot et $x \in \mathcal{V}$ une variable, on note w_x la projection du mot w sur la composante x de l'alphabet $\Sigma_\mathcal{V}$. On note $\overline{\nu}(w) = (\nu(w_x))_{x\in\mathcal{V}} \in \mathbb{N}^\mathcal{V}$ l'assignation codée par la mot w. Par exemple, $\overline{\nu}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (18, 7, 6)$.

On montre par induction sur la formule φ que pour tout ensemble fini $\mathcal{V}$ de variables contenant les variables libres de φ, on peut construire un automate $\mathcal{A}_\varphi$ sur l'alphabet $\Sigma_\mathcal{V}$ tel que pour tout mot $w \in (\Sigma_\mathcal{V})^*$, on a $w \in L(\mathcal{A}_\varphi) \iff \overline{\nu}(w) \vDash \varphi$.

Formules atomiques Les automates pour les formules $x_1 = 0$ (pour $\mathcal{V} = \{x_1\}$) et $x_1 = x_2 + x_3$ (pour $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3\}$) sont respectivement donnés par



On peut naturellement décrire ces langages par des expressions rationnelles, respectivement 0^* et $\left[\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)^*\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right]^*$.

Le fait qu'on puisse à souhait enrichir l'ensemble $\mathcal{V}$ provient du processus de cylindrification. Soient Σ_1 et Σ_2 deux alphabets finis. Si $\varphi : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ est un morphisme lettre à lettre (c'est-à-dire tel que $\varphi(a) \in \Sigma_2$ pour toute lettre $a \in \Sigma_1$) et si L est un langage reconnaissable sur Σ_2, alors $\varphi^{-1}(L)$ est un langage reconnaissable sur Σ_1. On peut démontrer ce résultat en partant d'un automate $\mathcal{A} = \langle \Sigma_2, Q, I, F, \delta\rangle$ reconnaissant le langage L et en construisant l'automate $\mathcal{A}' = \langle \Sigma_1, Q, I, F, \delta'\rangle$ avec $\delta' = \{(p, a, q) \mid (p, \varphi(a), q) \in \delta\}$. On peut également fournir une preuve très simple en utilisant les expressions rationnelles.

Un résultat plus général de clôture par substitution rationnelle a été prouvé dans la section 1.1.3.

Soit $\mathcal{V} \subsetneq \mathcal{V}'$ et $\mathcal{A}_\varphi$ un automate pour la formule φ sur l'alphabet $\Sigma_\mathcal{V}$. Si $\mathcal{V} \neq \emptyset$, en utilisant le morphisme $\varphi : \Sigma_{\mathcal{V}'}^* \to \Sigma_\mathcal{V}^*$ défini par $\varphi((a_x)_{x\in\mathcal{V}'}) = (a_x)_{x\in\mathcal{V}}$ avec $a_x \in \Sigma$ pour tout $x \in \mathcal{V}'$, on peut construire un automate pour la formule φ sur l'alphabet $\Sigma_{\mathcal{V}'}$. Si $\mathcal{V} = \emptyset$, alors la formule φ est close et l'automate $\mathcal{A}_\varphi$ reconnaît soit le langage $\emptyset$, soit le langage $\{\varepsilon\}$ (selon que la formule φ est valide ou non) : sur l'ensemble de variables $\mathcal{V}'$ non vide, on construit donc un automate qui reconnaît l'ensemble $\emptyset$ et $(\Sigma_{\mathcal{V}'})^*$ respectivement.

Formules composées L'automate $\mathcal{A}_{\neg\varphi}$ est défini comme l'automate complémentaire de $\mathcal{A}_\varphi$. Supposons par hypothèse d'induction qu'on possède les automates $\mathcal{A}_{\varphi_1}$ et $\mathcal{A}_{\varphi_2}$ relatifs aux formules φ_1 et φ_2 sur un ensemble de variables $\mathcal{V}$ contenant les variables libres de φ_1 et celles de φ_2. Pour la disjonction $\varphi_1 \vee \varphi_2$, on définit

l'automate $\mathcal{A}_{\varphi_1 \vee \varphi_2}$ comme la réunion disjointe des automates $\mathcal{A}_{\varphi_1}$ et $\mathcal{A}_{\varphi_2}$. Pour la conjonction $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, on définit l'automate $\mathcal{A}_{\varphi_1 \wedge \varphi_2}$ comme le produit synchrone des deux automates $\mathcal{A}_{\varphi_1}$ et $\mathcal{A}_{\varphi_2}$.

Pour la formule $\exists x_i\, \varphi$, on projète l'automate $\mathcal{A}_\varphi$ en effaçant la i-ième composante des symboles : si l'automate $\mathcal{A}_\varphi$ contient la transition

$$q, (c_1, \ldots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_n) \ \to q'$$

alors l'automate projeté $\mathcal{A}_{\exists x_i\, \varphi}$ contient la transition

$$q, (c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n) \ \to q'$$

La construction pour la quantification universelle se déduit de celle de la quantification existentielle et de celle de la négation.

Finalement, pour décider la validité d'une formule close φ, on construit son automate $\mathcal{A}_\varphi$ et on vérifie si son langage est non vide. □

C.f. DURAND-GASSELIN *et* HABERMEL *[2010]*

La procédure de décision décrite dans la preuve ci-dessus possède une complexité non élémentaire due à la déterminisation nécessaire de l'automate après chaque étape de disjonction ou de quantification existentielle. Cependant, des résultats récents ont permis de trouver une procédure de complexité triple exponentielle.

1.4.6 Automates boustrophédons

Cette section s'inspire de [Sak03, sec. I.7.2] et [Car08, sec. 3.10.2] qui généralise légèrement ce résultat. Voir aussi [HU79, sec. 2.6].

On étend dans cette section le pouvoir des automates finis pour qu'ils puissent se déplacer sur le mot donné en entrée, non pas seulement de gauche à droite, mais autant qu'ils le veulent dans les deux directions. On va montrer que cette atout ne leur apporte curieusement aucun pouvoir supplémentaire.

Définition 1.117 (Automate boustrophédon)**.** On appelle *automate boustrophédon* (ou *automate à double sens*) un quintuplet $\langle Q, \Sigma \uplus \{\triangleright, \triangleleft\}, I, F, \delta \rangle$ avec Q un ensemble fini d'états, $I \subseteq Q$ un ensemble d'états initiaux, $F \subseteq Q$ un ensemble d'états acceptants et $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \uplus \{\triangleright, \triangleleft\}) \times \{\leftarrow, \rightarrow\} \times Q$ la relation de transition. Une configuration est un triplet (u, q, v) avec $u, v \in (\Sigma \uplus \{\triangleright, \triangleleft\})^*$ et $q \in Q$: on dit que la *tête de lecture* de l'automate est entre u et v. Le franchissement d'une transition (q, a, d, q') modifie la configuration courante (u, q, av) en (u', q', v') si

$$(d = \rightarrow, u' = ua \text{ et } v = av') \text{ ou } (d = \leftarrow, u = u'b \text{ et } v' = bav)$$

Un calcul acceptant d'étiquette $w \in \Sigma^*$, est une suite de configurations franchissables deux à deux d'une configuration $(\triangleright, i, w\triangleleft)$ avec $i \in I$ à une configuration $(\triangleright w \triangleleft, f, \varepsilon)$ avec $f \in F$. Un mot $w \in \Sigma^*$ est reconnu par l'automate s'il existe un calcul acceptant d'étiquette w. Le langage de l'automate est l'ensemble des mots reconnus.

Ainsi, un automate boustrophédon est une machine de TURING dont la bande de lecture est limitée à la taille du mot en entrée, qui ne peut pas écrire sur sa bande. Les symboles $\triangleright$ et $\triangleleft$ qu'on a ajouté à l'alphabet d'entrée sont donc à considérer comme des marqueurs de début et de fin de mot, assurant que l'automate ne *sort* pas accidentellement de la bande de lecture.

Théorème 1.118. *Soit $\mathcal{A}$ un automate boustrophédon. Le langage L de $\mathcal{A}$ est rationnel.*

Démonstration. On va montrer que le langage L est saturé par une congruence sur Σ^* d'index fini (c.f. section 1.3.5). Pour cela, on introduit quatre fonctions $\lambda_0^0, \lambda_0^1, \lambda_1^0, \lambda_1^1 : \Sigma^* \longrightarrow \mathfrak{P}(Q \times Q)$: pour un mot $w \in \Sigma^*$, le couple $(p, q) \in Q^2$ appartient à λ_0^1 s'il existe un calcul de $\mathcal{A}$ de l'état p avec la tête de lecture sur la première lettre de w à l'état q avec la tête de lecture après la dernière lettre de w, et qui ne lit que des lettres de w. On définit similairement les trois autres fonctions, comme représentées dans la figure 1.2.

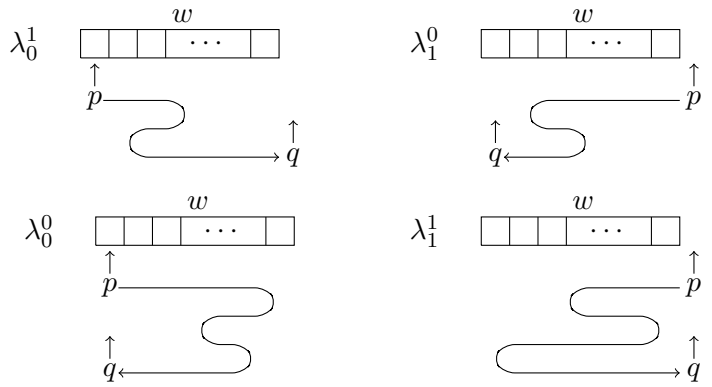


FIGURE 1.2 – Définitions des fonctions $\lambda_0^0, \lambda_0^1, \lambda_1^0, \lambda_1^1$ sur un mot w.

On définit alors la relation d'équivalence $\sim$ sur Σ^* par

$$w \sim w' \text{ si } \begin{cases} \lambda_0^0(w) = \lambda_0^0(w') \\ \lambda_0^1(w) = \lambda_0^1(w') \\ \lambda_1^0(w) = \lambda_1^0(w') \\ \lambda_1^1(w) = \lambda_1^1(w') \end{cases}$$

Cette relation possède un nombre fini de classes d'équivalence, borné par $2^{4|Q|^2}$ puisque les fonctions $\lambda_0^0, \lambda_0^1, \lambda_1^0, \lambda_1^1$ peuvent prendre $2^{|Q|^2}$ valeurs différentes.

Montrons que $\sim$ est une congruence de monoïde. Soient u, u', v, v' des mots sur Σ tels que $u \sim u'$ et $v \sim v'$. On montre que $\lambda_0^1(uv) = \lambda_0^1(u'v')$: les trois autres égalités se prouvent de manière similaire et il s'en suit que $uv \sim u'v'$. Soit $(p, q) \in \lambda_0^1(uv)$. Un chemin de p à q à l'intérieur de uv se décompose en une suite finie de chemins à l'intérieur de u et v (c.f. figure 1.3) : comme $u \sim u'$ et $v \sim v'$, les chemins à l'intérieur de u et v peuvent être remplacés par des chemins équivalents à l'intérieur de u' et v'. Ainsi $(p, q) \in \lambda_0^1(u'v')$. On prouve réciproquement l'autre inclusion.

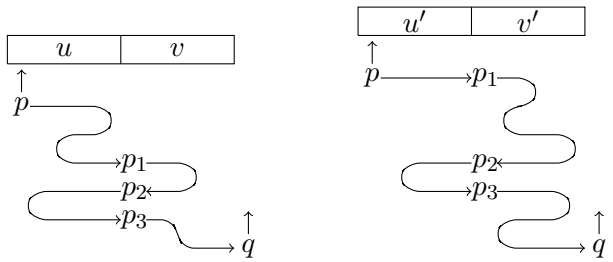


FIGURE 1.3 – Égalité $\lambda_0^1(uv) = \lambda_0^1(u'v')$.

On montre finalement que la congruence $\sim$ sature le langage L. Soient w et w' deux mots sur Σ tels que $w \sim w'$. Un calcul acceptant d'étiquette w se décompose

en une suite de calculs à l'intérieur de w et de transitions sur les symboles $\triangleright$ et $\triangleleft$ (c.f. figure 1.4). Comme $w \sim w'$, les calculs à l'intérieur de w peuvent être remplacés par des calculs à l'intérieur de w' pour obtenir un calcul acceptant d'étiquette w'. Ainsi $w \in L$ si et seulement si $w' \in L$.

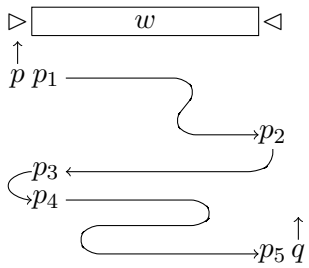


FIGURE 1.4 – Décomposition d'un calcul acceptant d'étiquette w.

□

Chapitre 2

Références supplémentaires

Ces références supplémentaires contiennent des articles classiques du domaine, malheureusement souvent difficiles à obtenir, et des articles ou des livres plus récents dont la lecture complète celle de la bibliographie recommandée.

Alfred V. AHO, 1990. Algorithms for finding patterns in strings. Dans Jan VAN LEEUWEN, éditeur, *Handbook of Theoretical Computer Science*, volume A, chapitre 5, pages 256–300. Elsevier.

Valentin ANTIMIROV, 1996. Partial derivatives of regular expressions and finite automaton constructions. *Theoretical Computer Science*, 155(2):291–319. doi: 10.1016/0304-3975(95)00182-4.

Danièle BEAUQUIER, Jean BERSTEL, et Philippe CHRÉTIENNE, 1992. *Eléments d'algorithmique*. Masson. URL `http://www-igm.univ-mlv.fr/~berstel/Elements/`.

Jean BERSTEL, 1979. *Transductions and Context-Free Languages*. Teubner Studienbücher: Informatik. Teubner. ISBN 3-519-02340-7. URL `http://www-igm.univ-mlv.fr/~berstel/LivreTransductions/`.

Jean BERSTEL et Dominique PERRIN, 1985. *Theory of Codes*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA. ISBN 0120934205.

Jean BERSTEL et Jean-Éric PIN, 1996. Local languages and the Berry-Sethi algorithm. *Theoretical Computer Science*, 155(2):439–446. doi: 10.1016/0304-3975(95)00104-2.

Alexandre BOUDET et Hubert COMON, avril 1996. Diophantine equations, Presburger arithmetic and finite automata. Dans Hélène KIRCHNER, éditeur, *21st International Colloquium on Trees in Algebra and Programming (CAAP'96)*, volume 1059 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 30–43. Springer. doi: 10.1007/3-540-61064-2_27.

Janusz A. BRZOZOWSKI, 1963. Canonical regular expressions and minimal state graphs for definite events. Dans *Symposium on the Mathematical Theory of Automata*, pages 529–561.

Janusz A. BRZOZOWSKI, 1964. Derivatives of regular expressions. *Journal of the ACM*, 11 (4):481–494. doi: 10.1145/321239.321249.

Janusz A. BRZOZOWSKI et Edward J. MCCLUSKEY, 1963. Signal flow graph techniques for sequential circuit state diagrams. *IRE Transactions on Electronic Computers*, 12:67–76. doi: 10.1109/PGEC.1963.263415.

Noam CHOMSKY, 1956. Three models for the description of language. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2(3):113–124. doi: 10.1109/TIT.1956.1056813.

Maxime CROCHEMORE et Christophe HANCART, 1997. Automata for matching patterns. Dans Grzegorz ROZENBERG et Arto SALOMAA, éditeurs, *Handbook of Formal Languages*, volume 2. Linear Modeling : Background and Application, chapitre 9, pages 399–462. Springer. ISBN 3-540-60648-3.

Julien DAVID, 2010. The average complexity of Moore's state minimization algorithm is $O(n \log \log n)$. Dans Petr HLINENÝ et Antonín KUCERA, éditeurs, *35th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2010)*, volume 6281 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 318–329. doi: 10.1007/978-3-642-15155-2_29.

Antoine DURAND-GASSELIN et Peter HABERMEL, 2010. On the use of non-deterministic automata for presburger arithmetic. Dans Paul GASTIN et François LAROUSSINIE, éditeurs, *21st concur (CONCUR 2010)*, volume 6269 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 373–387. Springer. doi: 10.1007/978-3-642-15375-4_26.

Andrzej EHRENFEUCHT et Paul ZEIGER, 1976. Complexity measures for regular expressions. *Journal of Computer and System Sciences*, 12(2):134–146. doi: 10.1016/S0022-0000(76)80034-7.

Andrzej EHRENFEUCHT, Rohit PARIKH, et Grzegorz ROZENBERG, 1981. Pumping lemmas for regular sets. *SIAM Journal on Computing*, 10(3):536–541. doi: 10.1137/0210039.

Calvin C. ELGOT et Jorge E. MEZEI, 1965. On relations defined by generalized finite automata. *IBM Journal of Research and Development*, 9(1):47–68. URL `http://www.research.ibm.com/journal/rd/091/ibmrd0901E.pdf`.

Shimon EVEN, 1965. On information lossless automata of finite order. *IEEE Transactions on Electronic Computers*, EC-14(4):561–569. doi: 10.1109/PGEC.1965.263996.

V. M. GLUSHKOV, 1961. The abstract theory of automata. *Russian Mathematical Surveys*, 16(5):1–53. doi: 10.1070/RM1961v016n05ABEH004112.

Markus HOLZER et Barbara KÖNIG, 2004. On deterministic finite automata and syntactic monoid size. *Theoretical Computer Science*, 3(2):319–347. doi: 10.1016/j.tcs.2004.04.010.

Juraj HROMKOVIČ, Sebastian SEIBERT, et Thomas WILKE, 1997. Translating regular expressions into small ε-free nondeterministic finite automata. Dans R. REISCHUK, éditeur, *14th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'97)*, volume 1200 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 55–66. Springer. ISBN 3-540-62616-6. doi: 10.1007/BFb0023448.

Tao JIANG et Bala RAVIKUMAR, 1993. Minimal NFA problems are hard. *SIAM Journal on Computing*, 22(6):1117–1141. doi: 10.1137/0222067.

Stephen C. KLEENE, 1956. Representation of events in nerve nets and finite automata. Dans C. E. SHANNON et J. MCCARTHY, éditeurs, *Automata Studies*, pages 3–40. Princeton University Press.

Donald E. KNUTH, James H. MORRIS, Jr., et Vaughan R. PRATT, 1977. Fast pattern matching in strings. *SIAM Journal on Computing*, 6(2):323–350. doi: 10.1137/0206024.

Robert MCNAUGHTON et H. YAMADA, 1960. Regular expressions and state graphs for automata. *IRE Transactions on Electronic Computers*, 9(1):39–47.

Christos PAPADIMITRIOU, 1993. *Computational Complexity*. Addison-Wesley. ISBN 0-201-53082-1.

Michael O. RABIN et Dana SCOTT, 1959. Finite automata and their decision problems. *IBM Journal of Research and Development*, 3(2):114–125. URL `http://www.research.ibm.com/journal/rd/032/ibmrd0302C.pdf`.

Thomas REPS, 1998. "Maximal-munch" tokenization in linear time. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, 20(2):259–273. doi: 10.1145/276393.276394.

Marcel-Paul SCHÜTZENBERGER, 1977. Sur une variante des fonctions séquentielles. *Theoretical Computer Science*, 4(1):47–57. doi: 0.1016/0304-3975(77)90055-X. URL `http://igm.univ-mlv.fr/~berstel/Mps/Travaux/A/1977-3SequentiellesTcs.pdf`.

Imre SIMON, 1994. String matching algorithms and automata. Dans Juliani KARHUMÄKI, Hermann MAURER, et Grzegorz ROZENBERG, éditeurs, *Results and Trends in Theoretical Computer Science: Colloquium in Honor of Arto Salomaa*, volume 812 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 386–395. Springer. ISBN 978-3-540-58131-4. doi: 10.1007/3-540-58131-6_61.

R. E. STEARNS et H. B. HUNT III, 1985. On the equivalence and containment problems for unambiguous regular expressions, regular grammars and finite automata. *SIAM Journal on Computing*, 14(3):598–611. doi: 10.1137/0214044.

Larry J. STOCKMEYER et Albert R. MEYER, 1973. Word problems requiring exponential time (preliminary report). Dans *Fifth Symposium on Theory of Computing (STOC '73)*, pages 1–9. ACM Press. doi: 10.1145/800125.804029.

Robert E. TARJAN, 1972. Depth first search and linear graph algorithms. *SIAM Journal on Computing*, 1(2):146–160. doi: 10.1137/0201010.

Ken THOMPSON, 1968. Regular expression search algorithm. *Communications of the ACM*, 11(6):419–422. doi: 10.1145/363347.363387.

Qiqi YAN, 2008. Lower bounds for complementation of ω-automata via the full automata technique. *Logical Methods in Computer Science*, 4(1):5. doi: 10.2168/LMCS-4(1:5)2008.

Sheng YU, 1997. Regular languages. Dans Grzegorz ROZENBERG et Arto SALOMAA, éditeurs, *Handbook of Formal Languages*, volume 1. Word, Language, Grammar, chapitre 2, pages 41–110. Springer. ISBN 978-3-540-60420-4.