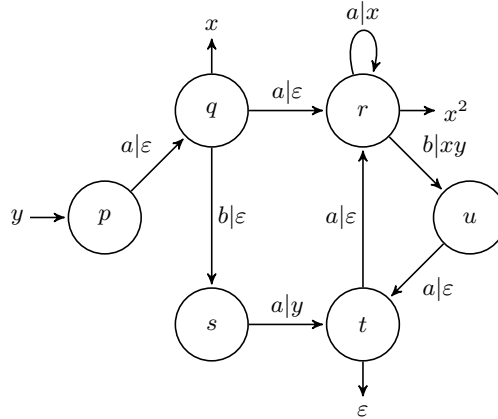


TD 12 : Minimisation de fonctions séquentielles

Exercice 1 (Minimisation). Minimiser la fonction séquentielle $\{a, b\}^* \rightarrow \{x, y\}^*$ définie par l'automate suivant :



1. Calculer les préfixes minimaux $m_q = \bigwedge \llbracket A_q \rrbracket(\{a, b\}^*)$ pour chaque état q de l'automate.
2. Donner l'automate normalisé équivalent.
3. Minimiser cet automate par raffinement de partitions.

Exercice 2 (Fonction séquentielle pure). Soient $\theta : A^* \rightarrow B^*$ une fonction et $\$$ un symbole qui n'appartient pas à A . On définit la fonction $\tau : (A \cup \{\$\})^* \rightarrow B^*$ par, pour tout w de A^* :

$$\theta(w) = \tau(w\$) .$$

Montrer que θ est séquentielle si et seulement si τ est séquentielle pure.

Exercice 3 (Résiduels).

1. Montrer que la fonction successeur n'est pas séquentielle sur un codage binaire des entiers commençant par le bit de poids fort.
2. Montrer que la fonction $n \mapsto \lfloor n/3 \rfloor$ n'est pas séquentielle sur un codage binaire des entiers commençant par le bit de poids faible.

Exercice 4 (Calcul de préfixes de langages reconnaissables). Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma^*, \delta, I, F \rangle$ un automate fini étendu (ses transitions peuvent être étiquetées par un mot de Σ^*) ;

on note $\mathcal{A}_q$ l'automate ayant q pour unique état initial : $\mathcal{A}_q = \langle Q, \Sigma^*, \delta, \{q\}, F \rangle$. On s'intéresse dans cet exercice au calcul par point fixe de

$$m(q) = \bigwedge L(\mathcal{A}_q)$$

pour tous les états q de Q (pour l'ordre préfixe $\leq$ sur Σ^*).

On complète $(\Sigma^*, \geq)$ à l'aide d'un nouvel élément 0 , tel que $u \leq 0$ pour tout u de Σ^* ; par convention $|0| = \infty$. Notons $S = \Sigma^* \uplus \{0\}$.

1. Montrer que l'on peut étendre l'opération de concaténation à S en respectant l'ordre préfixe.
2. Montrer que $(S^Q, \geq)$ est un ordre partiel complet avec $\bar{0} : q \mapsto 0$ pour plus petit élément.
3. On considère la fonction f de S^Q dans lui-même, définie pour tout m de S^Q et q de Q par

$$(f(m))(q) = \left(\bigwedge_{(q,u,p) \in \delta} u \cdot m(p) \right) \wedge \begin{cases} \varepsilon & \text{si } q \in F \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $(S, \geq)$.

Par le théorème du point fixe de KLEENE, on en déduit l'existence d'un plus petit point fixe m (pour $\geq$, donc un plus grand point fixe pour $\leq$) tel que $f(m) = m$, obtenu comme la limite de la séquence d'itération de KLEENE $(f^i(\bar{0}))_i$.

4. Soit $i \geq 0$; on définit $L^{<i}(\mathcal{A}_q)$ comme le sous-ensemble des mots de $L(\mathcal{A}_q)$ acceptés par $\mathcal{A}$ depuis l'état q en suivant un nombre de transitions strictement inférieur à i . On obtient ainsi $L^{<0}(\mathcal{A}_q) = \emptyset$ et $L(\mathcal{A}_q) = \bigcup_{i \geq 0} L^{<i}(\mathcal{A}_q)$.

Montrer que pour tout $i \geq 0$ et pour tout q de Q ,

$$(f^i(\bar{0}))(q) = \bigwedge L^{<i}(\mathcal{A}_q) .$$

5. Nous avons presque un algorithme : il reste à montrer que $(f^i(\bar{0}))_i$ atteint son point fixe en un nombre fini d'étapes. Nous montrons en fait beaucoup mieux, à savoir qu'il suffit de $2 \cdot |Q|$ itérations.

Supposons $\mathcal{A}$ réduit et $n = |Q|$, on note m_q^i pour $(f^i(\bar{0}))(q)$.

- (a) Montrer que $f^n(\bar{0})$ appartient à $(\Sigma^*)^Q$.
- (b) On considère les sous-ensembles P_j de Q définis par récurrence sur $j \geq 1$ par

$$P_1 = \{p \in Q \mid |m_p^{n+1}| = \min\{|m_q^{n+1}| \mid q \in Q\}\}$$

$$P_{j+1} = \{p \in (Q \setminus \bigcup_{k \leq j} P_k) \mid |m_p^{n+j+1}| = \min\{|m_q^{n+j+1}| \mid q \in (Q \setminus \bigcup_{k \leq j} P_k)\}\} .$$

Montrer que, pour tout p dans P_j , $m_p^{n+j} = m_p^{n+j+1}$ et conclure que $2n$ est bien une borne supérieure au nombre d'itérations.

6. En considérant l'automate suivant, montrer que la borne de $2 \cdot |Q|$ itérations est atteinte :

