TD 9 : Automates à pile

Exercice 1 (Exemples d'automates à pile)**.** Donner un automate à pile $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F\rangle$ pour chacun des langages suivants et justifier sa correction :

1. $L_1 = \{a^n b^m \mid 0 < m \leq n\}$; peut-on donner un automate déterministe ? simple ? acceptant par pile vide ? sans ε-transition ?
2. $L_2 = L(\mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ a pour alphabet terminal $\{d, n, v, p\}$, pour alphabet non terminal $\{S, N, V, P\}$ et pour règles

$$\begin{aligned} S &\to N\, V \\ N &\to d\, n \mid N\, P \\ V &\to v \mid V\, N \mid V\, P \\ P &\to p\, N \end{aligned}$$

3. $L_3 = L_{\text{pal}} = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$,
4. $L_4 = \overline{L_{\text{pal}}}$,
5. $L_5 = \overline{L_{\text{copie}}}$ où $L_{\text{copie}} = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Exercice 2 (Formes particulières)**.**

1. Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F\rangle$ un automate à pile. Montrer que l'on peut construire un automate à pile $\mathcal{A}'$ équivalent avec une relation de transition $T' \subseteq Q' \times Z' \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q' \times Z'^{\leq 2}$.
2. Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F\rangle$ un automate à pile. Montrer que l'on peut construire un automate à pile $\mathcal{A}'$ équivalent où les transitions sont de la forme

$$(q, z, x, q', zz') \qquad (push)$$
$$(q, z, x, q', \varepsilon) \qquad (pop)$$

où q et q' sont des états de Q', z et z' des symboles de Z', et x un symbole de $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

Exercice 3 (Langage de pile)**.** Soit $\Sigma_n = \{a_1, \ldots, a_n\} \uplus \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$ l'alphabet à n paires de parenthèses. On définit un système de réécriture engendré par les règles $a_i \bar{a}_i \to \varepsilon$ pour tout $0 < i \leq n$. Vous avez vu dans le partiel que l'ensemble des mots irréductibles pour $\to$ d'un langage reconnaissable L était lui-même reconnaissable, c.-à-d. que

$$\text{red}(L) = \{v \in \Sigma_n^* \mid \exists w \in L, w \to^* v \wedge v \not\to\}$$

était reconnaissable si L était reconnaissable.

Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F\rangle$ un automate à pile avec un ensemble fini de transitions $T \subseteq Q \times Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q \times Z^*$.

1. On considère T comme un alphabet, on pose $Q \uplus Z = \{a_1, \dots, a_n\}$, et on définit le morphisme h de T^* dans Σ_n^* par $h(q, z, a, q', \gamma) = \bar{q}\bar{z}\gamma q'$. Montrer que le langage

$$L_{q,z,q'} = \mathrm{red}(zq \cdot h(T^*)) \cap (Z^* \cdot \{q'\})$$

est un langage reconnaissable pour tous q, q' de Q et z de Z.

2. Soit $\gamma q'$ un mot de $L_{q,z,q'}$. Montrer qu'il existe un calcul $(q, z) \xrightarrow{*} (q', \gamma)$ dans l'automate à pile $\mathcal{A}$.
3. Montrer que $L_{q,z,q'} = \{\gamma q' \in Z^* \cdot \{q'\} \mid \exists (q, z) \xrightarrow{*} (q', \gamma) \text{ dans } \mathcal{A}\}$.

Exercice 4 (Acceptation généralisée)**.** Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0 \rangle$ un automate à pile et $K : Q \to \mathrm{Rec}(Z^*)$ une condition d'acceptation. Le langage reconnu par $\mathcal{A}$ est alors défini comme

$$L_K(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in Q, \gamma \in K(q), (q_0, z_0) \xrightarrow{w} (q, \gamma)\} \ .$$

On retrouve les conditions d'acceptations classiques

- par état final en posant $K(q) = Z^*$ pour q dans F et $K(q) = \emptyset$ sinon,
- par pile vide en posant $K(q) = \{\varepsilon\}$ pour tout q de Q.

1. Montrer que l'on peut construire un automate à pile $\mathcal{A}'$ acceptant par état final tel que $L_K(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$.
2. Peut-on faire en sorte que, si $\mathcal{A}$ est déterministe, alors $\mathcal{A}'$ le soit aussi ?