TD 6 : Grammaires syntagmatiques

Notations

- Une grammaire *syntagmatique* (générale, de type 0, etc.) est un tuple $G = \langle N, \Sigma, P, S\rangle$ où $V = N \uplus \Sigma$ et $P \subseteq V^+ \times V^*$.
- Une telle grammaire est *monotone* si pour toute production $\alpha \to \beta$ de P, $|\alpha| \leq |\beta|$ ou $\alpha = S$ et $\beta = \varepsilon$ (et dans ce cas S n'apparaît dans la partie droite d'aucune règle).
- Elle est *contextuelle avec effacement* si toute règle de P est de la forme $\alpha_1 A \alpha_2 \to \alpha_1 \beta \alpha_2$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ dans V^* et A dans N.
- Elle est *contextuelle* (contextuelle sous forme normale, de type 1, etc.) si β est pris dans V^+ ou $\alpha_1 = \alpha_2 = \varepsilon$ et $A = S$ (et dans ce cas S n'apparaît dans la partie droite d'aucune règle).
- Elle est *algébrique* (non contextuelle, hors contexte, de type 2, etc.) si $P \subseteq N \times V^*$.

Exercice 1 (Exemples de langages)**.**

1. Donner une grammaire monotone pour le langage $\{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$.
2. Même question pour le langage $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Exercice 2 (Équivalence entre grammaires)**.**

1. Montrer que pour toute grammaire syntagmatique (resp. monotone, contextuelle avec effacement, contextuelle) G, il existe une grammaire G' syntagmatique (resp. monotone, contextuelle avec effacement, contextuelle) équivalente telle que les règles de P' soient (de plus) de la forme

$$\alpha \to \beta \text{ avec } \alpha \in N^+ \text{ et } \beta \in N^*, \text{ ou de la forme}$$
$$A \to a \text{ avec } A \in N \text{ et } a \in \Sigma.$$

2. Montrer que pour toute grammaire monotone G, il existe une grammaire monotone G' équivalente telle que, si $\alpha \to \beta$ est une règle de P', alors $|\beta| \leq 2$ et $\alpha \in N^+$.
3. En déduire que pour toute grammaire monotone G, il existe une grammaire contextuelle G' équivalente.
4. Étendre la démonstration précédente pour montrer que pour toute grammaire syntagmatique G, il existe une grammaire contextuelle avec effacement G' équivalente.

Exercice 3 (Langage de Dyck)**.** Soit $\Sigma_n = \{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$ l'alphabet formé de n paires de parenthèses $(a_i, \bar{a}_i)$. Un mot w de Σ^* est *bien parenthésé* s'il est équivalent

au mot vide dans la congruence $\equiv$ sur Σ_n^* engendrée par $a_i\bar{a}_i \equiv \varepsilon$ pour tout $0 < i \leq n$ (c-à-d. telle que $u \equiv u'$ et $v \equiv v'$ impliquent $uv \equiv u'v'$ pour tous u, u', v, v' de Σ_n^*).

Le *langage de* Dyck sur n parenthèses est l'ensemble des mots bien parenthésés sur Σ_n :

$$D_n^* = \{w \in \Sigma_n^* \mid w \equiv \varepsilon\} .$$

1. Montrer que si $w \equiv \varepsilon$ avec w dans Σ_n^+, alors il existe u, v dans Σ_n^* et $0 < i \leq n$ tels que $w = a_i u \bar{a}_i v$ et $u \equiv \varepsilon$ et $v \equiv \varepsilon$.
2. Monter que la grammaire algébrique avec pour ensemble de productions

$$\{S \to a_i S \bar{a}_i S \mid 0 < i \leq n\} \cup \{S \to \varepsilon\}$$

   engendre D_n^*.
3. On considère le cas $n = 1$. Montrer que w de Σ_1^* est tel que $w \equiv \varepsilon$ ssi $|w|_{a_1} = |w|_{\bar{a}_1}$ et pour tous u, v de Σ_1^* tels que $w = uv$, $|u|_{a_1} \geq |u|_{\bar{a}_1}$.

Exercice 4 (Grammaires linéaires droites et gauches)**.** Une grammaire algébrique est *linéraire droite* (resp. gauche), aussi appelée de type 3, si ses productions sont soit de la forme $A \to u$, soit de la forme $A \to uB$ (resp. $A \to Bu$) avec A et B dans N et u dans Σ^*.

1. Montrer qu'un langage sur Σ est reconnaissable si et seulement s'il est engendré par une grammaire linéaire droite.
2. Montrer que pour toute grammaire linéaire droite, on peut construire une grammaire linéaire gauche équivalente.