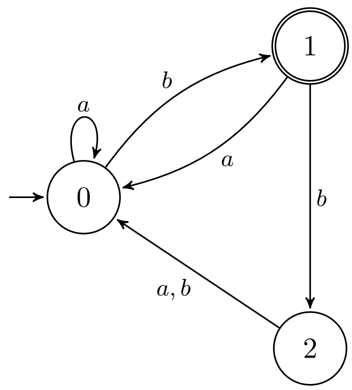
TD 5 : Reconnaissance par morphisme

Exercice 1 (Reconnaissance par monoïde)**.**

1. Donner un monoïde fini M, un morphisme φ et une partie P de M qui permettent de reconnaître le langage accepté par l'automate suivant :



2. En utilisant la représentation par monoïdes, montrer que les langages reconnaissables sont clos par concaténation. Si L_1 et L_2 sont reconnus par $\varphi_1 : \Sigma^* \to M_1$ et $\varphi_2 : \Sigma^* \to M_2$ respectivement, on pourra considérer

$$\begin{aligned} \psi : \quad & \Sigma^* \to 2^{M_1 \times M_2} \\ & w \mapsto \{(\varphi_1(u), \varphi_2(v)) \mid w = uv\} \ . \end{aligned}$$

Exercice 2 (Langages apériodiques)**.**

1. Un automate fini déterministe complet est *sans compteur* si pour tout mot w de Σ^*, tout $m \geq 1$, et tout état q, $\delta(q, w^m) = q$ implique $\delta(q, w) = q$.
   Montrer que si langage de Σ^* est apériodique, alors son automate minimal est sans compteur.
2. Montrer que si un langage est sans étoile, alors il est apériodique (utiliser les propriétés de clôture de la reconnaissance par monoïde).

Exercice 3 (Minimisation)**.**

1. Montrer qu'une relation d'équivalence $\equiv$ sur $T_p(\mathcal{F})$ est une congruence si et seulement si, pour tout r de $T_{p,\square}(\mathcal{F})$ et tous s, t de $T_p(\mathcal{F})$,

$$s \equiv t \text{ implique } r \cdot s \equiv r \cdot t \ .$$

2. Démontrer le théorème de Myhill-Nerode : Soit $L \subseteq T_p(\mathcal{F})$, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

   (a) L est reconnaissable,
   (b) L est saturé par une congruence d'index fini,
   (c) la congruence syntaxique $\equiv_L$ est d'index fini.
3. Soit la congruence $\sim_i$ sur Q définie pour tout q, q' de Q par

$$\begin{aligned} q \sim_0 q' &\text{ si } q \in F \Leftrightarrow q' \in F \\ q \sim_{i+1} q' &\text{ si } q \sim_i q' \text{ et } \forall n, \forall f \in \mathcal{F}_n, \forall q_1, \ldots, q_{j-1}, q_{j+1}, \ldots, q_n \in Q, \\ &\qquad \delta(q_1, \ldots, q_{j-1}, q, q_{j+1}, \ldots, q_n, f) \sim_i \delta(q_1, \ldots, q_{j-1}, q', q_{j+1}, \ldots, q_n, f)\ . \end{aligned}$$

   Montrer qu'il existe k tel que $\sim_k = \sim_{k+j}$ pour tout $j > 1$, et tel que $\sim_k$ soit la congruence de Nerode.
4. Minimiser l'automate d'arbres déterministe ascendant défini par les transitions

$$\begin{aligned} \delta((), a) &= q_1 & \delta((), b) &= q_2 \\ \delta((q_1), g) &= q_3 & \delta((q_2), g) &= q_4 \\ \delta((q_2, q_4), f) &= q_4 & \delta((q_1, q_3), f) &= q_4 \\ \delta((q_4), g) &= q_5 & \delta((q_3), g) &= q_6 \end{aligned}$$

   et l'ensemble final $\{q_3, q_4\}$.

Exercice 4 (Morphismes d'arbres)**.** Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux alphabets et $\mathcal{X}_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble de n variables. Un *morphisme d'arbre* h de $T(\mathcal{F})$ dans $T(\mathcal{F}')$ est défini comme l'extension homomorphique d'un ensemble de fonctions $h_\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}_n$ dans $T(\mathcal{F}', \mathcal{X}_n)$:

$$\begin{aligned} h(a) &= h_\mathcal{F}(a) & &\text{si } a \in \mathcal{F}_0 \\ h(f(t_1, \ldots, t_n)) &= h_\mathcal{F}(f)[h(t_1)/x_1, \ldots, h(t_n)/x_n] & &\text{si} f \in \mathcal{F}_n \end{aligned}$$

Un morphisme d'arbre est *linéaire* si $h_\mathcal{F}(f)$ est linéaire pour tout f de $\mathcal{F}$.

1. Montrer que les langages reconnaissables ne sont pas clos par morphisme.
2. Montrer que les langages reconnaissables sont clos par morphismes linéaires.
3. Montrer que les langages reconnaissables sont clos par morphismes inverses.

Exercice 5 (Monoïde d'arbres)**.** Soit l'alphabet $\Sigma = \Sigma_2 \uplus \Sigma_0$ avec $\Sigma_0 = \{\varepsilon\}$. On note $E(\Sigma)$ l'ensemble des arbres à trou *élémentaires* de $T_\Box(\Sigma)$:

$$E(\Sigma) = \{r \in T_\Box(\Sigma) \mid \exists t \in T(\Sigma), f \in \Sigma_2, r = f(\Box, t) \vee r = f(t, \Box)\}\ .$$

Un arbre t de $T(\Sigma)$ peut alors être vu comme une concaténation $r \cdot \varepsilon$ avec r dans $T_\Box(\Sigma)$.

1. Montrer que le monoïde $\langle T_\Box(\Sigma), \cdot, \Box \rangle$ est librement généré par $E(\Sigma)$.

2. Si L est un langage d'arbres sur Σ, on note
$$R(L) = \{r \in T_{\square}(\Sigma) \mid r \cdot \varepsilon \in L\}$$
son ensemble d'arbres à trous associés. Montrer que si L est un langage reconnaissable d'arbres, alors $R(L)$ est un langage reconnaissable sur $E(\Sigma)$.
3. Soit un automate fini de mots $\mathcal{A} = \langle E(\Sigma), Q, \delta, I, F\rangle$ sur l'alphabet infini $E(\Sigma)$ (c-à-d Q et δ sont finis). Montrer que $L(\mathcal{A}) \cdot \varepsilon$ est un langage reconnaissable d'arbres sur Σ.