TD 4 : Automates d'arbres

Exercice 1 (Langages non reconnaissables)**.**

1. Montrer que l'ensemble des instances closes de $f(x,x)$ n'est pas reconnaissable.

Soit l'alphabet constitué de $\Sigma_0 = \{c\}$ et $\Sigma_2 = \{a,b\}$.

2. Montrer que l'ensemble des arbres de $T(\Sigma)$ en forme de « peigne »
$$a(c, a(c, a(\ldots a(c, b(c, b(c, b(\ldots b(c, c))))))))$$
ayant autant de a que de b n'est pas reconnaissable.
3. Montrer que l'ensemble des arbres de $T(\Sigma)$ ayant le même nombre de nœuds étiquetés par a et par b n'est pas reconnaissable.

Exercice 2 (Automates alternants de mots)**.** Pour un ensemble d'éléments Q, on note $\mathbb{B}^+(Q)$ les formules booléennes positives non vides d'éléments de Q, par exemple une formule $p \wedge (q \vee r)$. On note $P \models \varphi$ si la valuation qui associe vrai aux éléments de P et faux aux éléments de $Q \backslash P$ satisfait φ.

Un *automate alternant* (de mots finis) est un tuple $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, I, F \rangle$ où

- Q est un ensemble fini d'états,
- Σ est un alphabet fini,
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathbb{B}^+(Q)$ est une fonction partielle de transition alternante,
- $I \in \mathbb{B}^+(Q)$ est la condition initiale,
- $F \subseteq Q$ est un ensemble d'états finals.

Une exécution de $\mathcal{A}$ sur un mot w est une forêt $t \subseteq \mathbb{N}^+$ étiquetée par des états de Q par $e : \mathbb{N}^+ \to Q$. L'ensemble $\mathbb{N} \cap t$ constitue l'ensemble des racines de la forêt. Pour un nœud $x \in \mathbb{N}^+$ d'une forêt t, l'ensemble de ses nœuds fils $x0$, $x1$, etc. est noté $\mathrm{Fils}(x) = \{xi \in t \mid i \in \mathbb{N}\}$. Si $xi \in t$ pour $x \in \mathbb{N}^+$ et $i \in \mathbb{N}$, alors $x \in t$, et si de plus $i > 0$, alors $x(i-1) \in t$.

La forêt étiquetée (t, e) pour $w = a_1 \ldots a_n \in \Sigma^*$ est alors telle que

- l'ensemble des racines $\mathbb{N} \cap t$ satisfait la condition initiale I, c'est-à-dire $\mathbb{N} \cap t \models I$,
- chaque nœud satisfait la relation de transition : pour tout nœud x à la profondeur $n \leq |w|$ (c'est-à-dire tel que $|x| = n+1$), $e(\mathrm{Fils}(x)) \models \delta(e(x), a_i)$.

L'exécution accepte w ssi chaque feuille x de t vérifie $e(x) \in F$.

1. Montrer que, pour tout automate $\mathcal{A}$ fini, il existe un automate alternant $\mathcal{A}'$ équivalent de taille $O(|\mathcal{A}|)$.
2. Donner une caractérisation des exécutions sur $w = a_1 \ldots a_n$ d'un automate alternant qui utilise une séquence $P_1 \ldots P_{n+1}$ de sous-ensembles de Q.
3. Montrer que, pour tout automate alternant $\mathcal{A}$, il existe un automate fini $\mathcal{A}'$ équivalent. Quelle est la taille de l'automate obtenu ?
4. Montrer que, pour tout automate fini $\mathcal{A}$, il existe un automate alternant de taille $O(|\mathcal{A}|)$ pour le complémentaire de $L(\mathcal{A})$.
5. Montrer que le problème du vide des automates alternants est PSpace-complet.