TD 3 : Automates d'arbres

Exercice 1 (Problèmes de décision).

1. Montrer que le problème du vide du langage d'un automate d'arbre peut être résolu en temps linéaire.
2. Montrer que les langages reconnaissables d'arbre sont clos par intersection. En déduire que le problème d'appartenance d'un arbre à un automate d'arbre est dans PTIME.

Exercice 2 (Langage de feuilles). Soit R un langage reconnaissable de mots sur $\{a, b\}^*$. Construire un automate d'arbre qui reconnaît tous les arbres binaires dont les nœuds internes sont étiquetés par c et dont la séquence de feuilles est dans R .

Exercice 3 (Clôture par les chemins). Soit t un arbre de $T(\mathcal{F})$ d'arité maximale p . On définit le langage des chemins $\pi(t)$ de t sur $\mathcal{F} \uplus \{1, \dots, p\}$ par

$$\pi(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in \mathcal{F}_0 \\ \bigcup_{i=1}^n \{fiw \mid w \in \pi(t_i)\} & \text{si } t = f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

$$\pi(L) = \bigcup_{t \in L} \pi(t)$$

et la clôture par les chemins de L comme

$$P(L) = \{t \in T(\mathcal{F}) \mid \pi(t) \subseteq \pi(L)\}$$

1. Montrer que si L est un langage reconnaissable d'arbres, alors $\pi(L)$ est un langage reconnaissable de mots.
2. Montrer que si L est un langage reconnaissable d'arbres, alors $P(L)$ en est aussi un.
3. Montrer qu'un langage reconnaissable d'arbres est clos par les chemins (c-à-d. $L = P(L)$) si et seulement s'il est reconnu par un automate descendant déterministe.
4. Peut-on décider si un langage reconnaissable d'arbres est clos par les chemins?

Exercice 4 (Reconnaissance généralisée). On considère le problème de décision suivant :

instance un terme t de $T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ et un automate d'arbres $\mathcal{A}$

question est-ce qu'il existe une instance close de t acceptée par $\mathcal{A}$?

1. Montrer que si t est un terme linéaire, alors ce problème est dans PTIME.

2. Montrer que si t n'est pas linéaire mais $\mathcal{A}$ est déterministe, alors ce problème est NP-complet (on pourra chercher une réduction depuis SAT).

Exercice 5 (Un seul arbre). Montrer que le problème de décision suivant est dans PTIME :

instance un automate d'arbres $\mathcal{A}$

question est-ce que $|L(\mathcal{A})| = 1$?