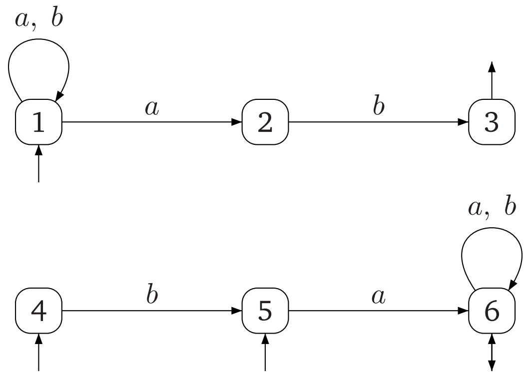
Opérations élémentaires sur les automates finis

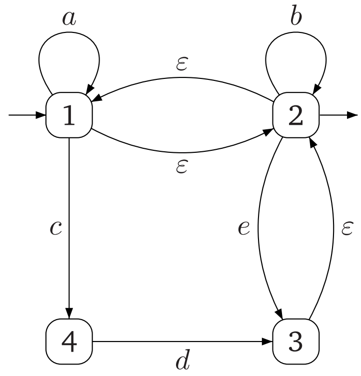
Exercice 1 (Déterminisation)

1. Construire un automate reconnaissant tous les mots qui finissent par aba. Déterminiser l'automate obtenu.
2. Déterminiser l'automate suivant :



Exercice 2 (Elimination des ε-transitions)

1. Montrer que pour tout automate fini avec ε-transitions $\mathcal{A}$, il existe un automate fini classique (non-déterministe) $\mathcal{B}$ qui reconnaît le même langage. Donner un algorithme qui construit $\mathcal{B}$ à partir de $\mathcal{A}$.
2. En appliquant ce qui précède, construire un automate fini qui reconnaît le même langage que l'automate suivant :



Exercice 3 (Propriétés de clôture)
Le but de cet exercice est de montrer des propriétés de clôture sur les langages réguliers en utilisant les automates finis.

Opérations usuelles Montrer que les langages reconnaissables sont stables par union, intersection, complémentaire, concaténation, image miroir.

Sous-mot Un mot $u = a_1 \cdots a_n \in A^*$ est un *sous-mot* d'un mot $v \in A^*$ s'il existe des mots $u_0 \cdots u_n \in A^*$ tels que $v = u_0 a_1 u_1 \cdots a_n u_n$. Pour un langage $L \subseteq A^*$, on note SM(L) l'ensemble des sous-mots de L.

Montrer que si L est un langage reconnaissable, alors SM(L) l'est aussi.

Shuffle Soient $u, v \in A^*$. On définit l'ensemble des shuffles (mélanges) de u et v par :

$$u \sqcup\!\sqcup\, v = \{w \in A^* |\ \exists u_1, v_1, \cdots u_n, v_n \in A^* \text{ tels que } u = u_1 \cdots u_n, v = v_1 \cdots v_n \text{ et } w = u_1 v_1 \cdots u_n v_n\}$$

Pour $K, L \in A^*$, on définit $K \sqcup\!\sqcup\, L = \{w \in A^* |\ \exists u \in K,\ \exists v \in L,\ w \in u \sqcup\!\sqcup\, v\}$.

Montrer que si K et L sont des langages reconnaissables, il en est de même pour $K \sqcup\!\sqcup\, L$.

Morphismes La classe des langages reconnaissables est close par morphisme et morphisme inverse. Soient A et B deux alphabets, et $f : A^* \to B^*$ un morphisme.
- Si $L \in \text{Rec}(A^*)$ montrer que $f(L) \in \text{Rec}(B^*)$.
- Si $L \in \text{Rec}(B^*)$ montrer que $f^{-1}(L) \in \text{Rec}(A^*)$.

Substitutions Une *substitution* est un morphisme de A^* dans $\mathcal{P}(B^*)$. Elle est *rationnelle* si elle est définie par une application σ de A dans Rec(B^*). La classe des langages reconnaissables est close par substitution et substitution inverse. Soient A et B deux alphabets, et $\sigma : A^* \to \mathcal{P}(B^*$ une substitution rationnelle.
- Si $L \in \text{Rec}(A^*)$ montrer que $\sigma(L) \in \text{Rec}(B^*)$.
- Si $L \in \text{Rec}(B^*)$ montrer que $\sigma^{-1}(L) = \{u \mid \sigma(u) \cap L \neq \emptyset\} \in \text{Rec}(A^*)$.

Application Montrer que le langage $\{a^n b a^n |\ n \geq 1\}$ n'est pas reconnaissable en utilisant le fait que $\{0^n 1^n |\ n \geq 1\}$ n'est pas reconnaissable, et des opérations qui préservent la reconnaissabilité.

Exercice 4 (Le barman aveugle)

On dispose de 4 jetons, chacun ayant une face bleue et une face rouge. Un joueur (le barman) a les yeux bandés. Son but est de retourner les 4 jetons sur la même couleur (dès que les 4 jetons sont retournés la partie s'arrête et le barman a gagné). Pour cela, il peut retourner à chaque tour 1, 2 ou 3 jetons. Un autre joueur perturbe le jeu en tournant le plateau sur lequel reposent les jetons d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quarts de tour entre chaque opération du barman. En utilisant une modélisation par des automates montrer que le barman a une stratégie gagnante, c'est-à-dire que quoi que fasse celui qui tourne le plateau, il a moyen de gagner.