TD 10 : Équité, premier ordre

1 CTL équitable

1.1 Expressivité

En utilisant la structure de Kripke donnée dans le support de cours, montrer que la formule $\mathsf{EGF}p$ n'est pas expressible en CTL.

En déduire que les contraintes d'équités ne sont pas expressibles en CTL.

1.2 Model Checking

On considère des contraintes d'équité *fortes* de la forme de conjonctions de formules de forme

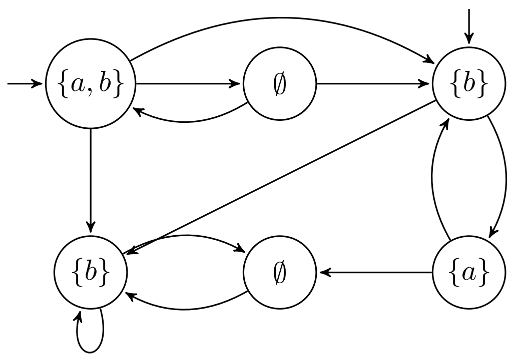
$$\mathsf{GF}\psi_1 \Rightarrow \mathsf{GF}\psi_2$$

Vérifier si la structure suivante modélise équitablement

$$\varphi = \mathsf{AGAF}a$$

sous la contrainte e définie par

$$\begin{aligned} \psi_1 &= b \wedge \neg a \\ \psi_2 &= \mathsf{E}(b\,\mathsf{U}(a \wedge \neg b)) \\ e &= \mathsf{GF}\psi_1 \Rightarrow \mathsf{GF}\psi_2 \end{aligned}$$



1. Calculer $[[\psi_1]]$ et $[[\psi_2]]$.
2. Calculer $[[\mathsf{EG}\top]]_e$.
3. Calculer $[[\varphi]]_e$.

2 Premier ordre

2.1 $\mathbf{FO}^3[<]$

Soit la macro binaire :

$$y = x + 1 \equiv x < y \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y)$$

On considère les formules de FO[<] suivantes sur les propositions atomiques $\{p, q\}$:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= p(x) \wedge \exists y(y = x + 1 \wedge q(y) \wedge \exists z(z = y + 1 \wedge p(z))) \\
\psi &= \forall x(p(x) \wedge \exists y(x < y \wedge p(y) \wedge \neg(\exists z(x < z \wedge z < y \wedge p(z))))) \\
&\quad \vee \forall x(\varphi(x) \vee \exists y(y = x + 1 \wedge \varphi(y)))
\end{aligned}$$

1. Donner une formule LTL équivalente à ψ.
2. Donner une expression sans étoile pour ψ.

2.2 $\mathbf{FO}^2[<]$

1. Montrer que toute formule LTL(F, P) φ peut être traduite en une formule $\mathrm{FO}^2[<]$ $\psi(x)$ avec une variable libre x telle que, pour tout σ de Σ^ω et tout i de $\mathbb{N}$, $\sigma, i \models \varphi$ ssi $\sigma \models \psi(i)$.
2. Montrer que toute formule LTL(X, Y) φ peut être traduite en une formule $\mathrm{FO}^2[<]$ ψ telle que, pour tout σ de Σ^ω, $\sigma, 0 \models \varphi$ ssi $\sigma \models \psi$.
3. En réutilisant les indications de la question 2.2 du TD numéro 4, montrer qu'il existe une formule de $\mathrm{FO}^2[<]$ dont la traduction en LTL(X, U) est de taille au moins exponentielle.