TD 6

1 LTL et bégayement

Une *fonction de bégayement* est une fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{N}_+$ des naturels dans les naturels strictement positifs. Si $w = s_0 s_1 \ldots$ est un mot infini de Σ^ω et f une fonction de bégayement, alors on note $w[f]$ le mot $s_0^{f(0)} s_1^{f(1)} \ldots$. Un langage L de Σ^ω est *invariant par bégayement* si, pour tout mot w de Σ^ω et pour toute fonction de bégayement f,

$$w \in L \text{ ssi } w[f] \in L$$

1. Montrer que si φ est une formule LTL(U), alors $L(\varphi)$ est invariant par bégayement.

Un mot $w = s_0 s_1 \ldots$ de Σ^ω est *sans bégayement* si pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit $s_i \neq s_{i+1}$, soit $s_i = s_j$ pour tout $j \geq i$. On note $\mathrm{sb}(L)$ l'ensemble des mots de L sans bégayement.

2. Montrer que, si L et L' sont deux langages invariants par bégayement, alors $\mathrm{sb}(L) = \mathrm{sb}(L')$ si et seulement si $L = L'$.
3. Monter que, si φ est une formule LTL(X, U) telle que $L(\varphi)$ est invariant par bégayement, alors on peut construire inductivement une formule $\tau(\varphi)$ de LTL(U) équivalente à φ sur les mots sans bégayement, et donc équivalente d'après le point précédent. Quelle est la complexité de votre conversion ?

2 Construction d'automates de Büchi par tableau

On considère dans cet exercice une autre méthode de construction d'un automate de Büchi à partir d'une formule LTL. On définit pour cela inductivement sur une formule φ sa *clôture* $\mathrm{cl}(\varphi)$ par (on identifie $\neg\neg\psi$ avec ψ) :

$$\varphi \in \mathrm{cl}(\varphi)$$
$$\psi \in \mathrm{cl}(\varphi) \Rightarrow \neg\psi \in \mathrm{cl}(\varphi)$$
$$\psi_1 \wedge \psi_2 \in \mathrm{cl}(\varphi) \Rightarrow \psi_1, \psi_2 \in \mathrm{cl}(\varphi)$$
$$\mathsf{X}\psi \in \mathrm{cl}(\varphi) \Rightarrow \psi \in \mathrm{cl}(\varphi)$$
$$\psi_1 \mathbin{\mathsf{U}} \psi_2 \in \mathrm{cl}(\varphi) \Rightarrow \psi_1, \psi_2 \in \mathrm{cl}(\varphi)$$

Un ensemble q de formules de $\mathrm{cl}(\varphi)$ est *consistent* s'il respecte les conditions
- $\top \in \mathrm{cl}(\varphi) \Rightarrow \top \in q$,
- $\psi \in q \Rightarrow \neg\psi \notin q$, et
- $\psi_1 \wedge \psi_2 \in q \Leftrightarrow \psi_1 \in q \wedge \psi_2 \in q$.

L'ensemble est *localement consistant* s'il respecte les conditions pour toute formule $\psi_1 \mathbin{\mathsf{U}} \psi_2$ de $\mathrm{cl}(\varphi)$

- $\psi_2 \in q \Rightarrow \psi_1 \mathsf{U} \psi_2 \in q$ et
- $\psi_1 \mathsf{U} \psi_2 \in q \wedge \psi_2 \notin q \Rightarrow \psi_1 \in q$.

Enfin, il est *maximal* si pour toute formule ψ de $\mathrm{cl}(\varphi)$

- $\psi \notin q \Rightarrow \neg\psi \in q$.

L'ensemble q est *élémentaire* s'il est consistent, localement consistent et maximal.

On souhaite construire un automate de Büchi pour φ une formule $\mathrm{LTL}(\mathsf{X}, \mathsf{U})$ avec des ensembles élémentaires de formules de $\mathrm{cl}(\varphi)$ en guise d'états.

1. Quel ensemble initial donneriez-vous à cet automate ?
2. À quelles conditions une transition peut-elle avoir lieu ?
3. On définit un automate de Büchi avec acceptance généralisée comme un automate avec un ensemble $F_1, \ldots, F_n$ d'ensembles d'états acceptants, tel qu'une exécution soit acceptée si et seulement si elle visite infiniment souvent chaque ensemble acceptant. Quels ensembles acceptants définir pour l'automate de Büchi ?
4. Appliquer la construction à la formule $\varphi = a \mathsf{U} b$.
5. On veut maintenant étendre cette construction pour des formules de $\mathrm{LTL}(\mathsf{X}, \mathsf{U}, \mathsf{Y}, \mathsf{S})$. Quels changements apporter à la construction ?