TD 5 : Optimisation d'automates de Büchi pour des formules LTL

1 Simplification de formules

Une première classe d'optimisations lors de la conversion de formules LTL en automates de Büchi consiste à simplifier les formules a priori.

1. Proposer des équivalences simplement vérifiables sur les formules LTL.
2. Simplifier la formule LTL suivante :

$$\mathsf{F}(((\mathsf{G}r)\,\mathsf{U}\,p) \wedge (\neg q\,\mathsf{U}\,p)) \vee \mathsf{F}(\neg p \vee \mathsf{F}q)$$

3. On considère des formules LTL(X, U) en forme normale négative. On cherche des conditions suffisantes simplement vérifiables sur les formules LTL pour que l'équivalence suivante soit vérifiée :

$$\psi\,\mathsf{U}\,\varphi \equiv \varphi \tag{1}$$

   On appelle formules purement finales les formules LTL (en forme normale négative) de la forme :
   - $\mathsf{F}\psi$ où ψ est une formule LTL, ou
   - $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1\,\mathsf{U}\,\psi$, $\mathsf{G}\varphi_1$, $\varphi_1\,\mathsf{R}\,\varphi_2$ ou $\mathsf{X}\varphi_1$, où φ_1 et φ_2 sont des formules purement finales et ψ une formule LTL.

   Montrer que le langage L sur Σ^ω d'une formule purement finale vérifie $\Sigma^* L = L$.
4. En déduire l'équivalence (1) dans le cas où φ est une formule purement finale.

2 Réduction d'automates de Büchi

Une seconde classe d'optimisations consiste à réduire les automates de Büchi a posteriori.

2.1 Non canonicité de l'automate minimal

On considère pour cet exercice le langage sur $\{a, b\}^\omega$ décrit par l'expression $a^+(b^+a)^\omega$.

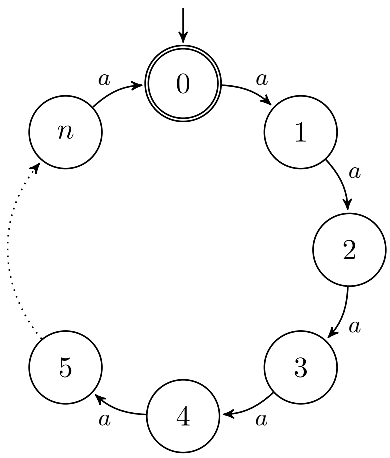
1. Donner un automate de Büchi avec trois états pour ce langage. Existe-t'il un automate de Büchi avec trois états pour le même langage non isomorphe à celui que vous avez donné ?
2. Montrez qu'il n'existe pas d'automate de Büchi avec deux états pour ce langage.

2.2 Simulations

On appelle une *simulation* une relation $\preceq$ sur un ensemble d'états Q telle que :

$$q_1 \preceq q_2 \text{ ssi } \forall a \in \Sigma, q_1' \in \delta(q_1, a) \text{ implique } \exists q_2' \in \delta(q_2, a), q_1' \preceq q_2'.$$

1. Montrer que si q_1 est simulé par q_2 ($q_1 \preceq q_2$), alors l'ensemble des mots pour lesquels il existe une exécution depuis q_1 est inclus dans l'ensemble depuis q_2.
   Si on définit l'automate de Büchi $\mathcal{A}_{q,E}$ comme l'automate $\mathcal{A}$ avec q en guise d'état initial et E en guise d'ensemble d'états acceptants, cela revient à montrer que $L(\mathcal{A}_{q_1,Q}) \subseteq L(\mathcal{A}_{q_2,Q})$.
2. Si F est l'ensemble des états acceptants de l'automate $\mathcal{A}$, $q_1 \preceq q_2$ implique-t'il $L(\mathcal{A}_{q_1,F}) \subseteq L(\mathcal{A}_{q_2,F})$? Comment raffiner un relation de simulation en une relation *correcte* pour que cela soit vrai ?
3. Comment peut-on exploiter une relation de simulation correcte pour diminuer le nombre d'états d'un automate de Büchi ?
4. Considérer la famille d'automates de Büchi $\mathcal{A}_n$ suivante :



   Quel est l'automate minimal pour $\mathcal{A}_n$? Comment se comporte votre définition d'une simulation correcte sur cet automate ?

3 Taille d'automate

En complément aux exercices 2.2 et 3.3 du TD 3, on s'intéresse à la taille minimale d'un automate de Büchi pour la formule LTL

$$(p \wedge \mathsf{X}^n p) \vee (\neg p \wedge \mathsf{X}^n \neg p) \qquad (\varphi_n)$$

1. Donner un automate de Büchi pour φ_n avec $O(n)$ états.
2. Montrer que tout automate de Büchi pour $\mathsf{G}\varphi_n$ possède au moins 2^n états.
3. En déduire de plus que l'automate du complémentaire du langage d'un automate de Büchi avec $O(n)$ états peut avoir un nombre exponentiel d'états.