

TD 13 : Fonctions séquentielles

Exercice 1 (Machine de MOORE). Une *machine de MOORE* de A dans B est un tuple $\mathcal{M} = \langle Q, A, B, \delta, \gamma, q_0 \rangle$ où Q est un ensemble fini d'états, $q_0 \in Q$ un état initial, A un alphabet d'entrée, B un alphabet de sortie, δ une fonction partielle de transition de $Q \times A$ dans Q , et γ une fonction de sortie de Q dans B^* . La fonction partielle $\llbracket \mathcal{M} \rrbracket : A^* \rightarrow B^*$ définie par \mathcal{M} retourne la séquence des sorties associées par un run dans \mathcal{M} .

1. Montrer que si \mathcal{M} est une machine de MOORE, alors on peut donner une fonction séquentielle équivalente.
2. Montrer que si \mathcal{A} est une fonction séquentielle (pure, ou machine de MEALY), alors on peut donner une machine de MOORE équivalente.

Exercice 2 (Opérations sur les entiers). Dans cet exercice on considère une représentation dans $B^* = \{0, 1\}^*$ des entiers en base 2 avec le bit de poids faible en premier.

1. Montrer que la fonction $f : B^* \rightarrow B^*$ qui à un entier codé en binaire associe le codage de son carré n'est pas séquentielle.
2. Montrer que l'addition est séquentielle.
3. Montrer de même que la multiplication par une constante est séquentielle.

Exercice 3 (Formules de PRESBURGER). On considère les *fonctions affines* de la forme

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

où les a_i sont des entiers naturels, et les x_i des variables à valeurs dans \mathbb{N} . On appelle *formule atomique* une formule de la forme $f(\psi_1, \psi_2)$, avec ψ_1 et ψ_2 des fonctions affines et f un opérateur de comparaison du type $<, \leq, =, \geq, >$.

On définit l'ensemble des formules de PRESBURGER comme l'ensemble obtenu à partir des formules atomiques en le fermant par combinaison booléenne (opérateurs \wedge, \vee et \neg) et par quantification existentielle (\exists) et universelle (\forall).

L'objectif de cet exercice est de montrer que les formules de PRESBURGER sont reconnaissables par automate, *i.e.* que pour toute formule de PRESBURGER φ , il existe un automate fini \mathcal{A}_φ qui reconnaît exactement les codages en binaire satisfaisant la formule φ .

1. Montrer que l'on peut se restreindre à l'opérateur de comparaison $=$.
2. Donner un automate séquentiel qui réalise la fonction $(x, y) \mapsto 2x + y$ sur les codages binaires (on pourra dans un premier temps réaliser $(x, y) \mapsto (2x, y)$).
3. Montrer que toute fonction affine est séquentielle.
4. Montrer que toute formule de PRESBURGER est reconnaissable par automate pour le codage avec bits de poids faible en premier.