TD 12 : Automates d'arbres

Exercice 1 (Minimisation)**.** Minimiser l'automate d'arbres déterministe ascendant défini par les transitions

$$\begin{aligned} \delta((),a) &= q_1 & \delta((),b) &= q_2 \\ \delta((q_1),g) &= q_3 & \delta((q_2),g) &= q_4 \\ \delta((q_2,q_4),f) &= q_4 & \delta((q_1,q_3),f) &= q_4 \\ \delta((q_4),g) &= q_5 & \delta((q_3),g) &= q_6 \end{aligned}$$

et l'ensemble final $\{q_3, q_4\}$.

Exercice 2 (Monoïde d'arbres)**.** Soit l'alphabet $\Sigma = \Sigma_2 \uplus \Sigma_0$ avec $\Sigma_0 = \{\varepsilon\}$. On note $E(\Sigma)$ l'ensemble des arbres à trou *élémentaires* de $T_\Box(\Sigma)$:

$$E(\Sigma) = \{r \in T_\Box(\Sigma) \mid \exists t \in T(\Sigma), f \in \Sigma_2, r = f(\Box, t) \vee r = f(t, \Box)\} \ .$$

Un arbre t de $T(\Sigma)$ peut alors être vu comme une concaténation $r \cdot \varepsilon$ avec r dans $T_\Box(\Sigma)$.

1. Montrer que le monoïde $\langle T_\Box(\Sigma), \cdot, \Box\rangle$ est librement généré par $E(\Sigma)$.
2. Si L est un langage d'arbres sur Σ, on note

   $$R(L) = \{r \in T_\Box(\Sigma) \mid r \cdot \varepsilon \in L\}$$

   son ensemble d'arbres à trous associés. Montrer que si L est un langage reconnaissable d'arbres, alors $R(L)$ est un langage reconnaissable sur $E(\Sigma)$.
3. Soit un automate fini de mots $\mathcal{A} = \langle E(\Sigma), Q, \delta, I, F\rangle$ sur l'alphabet infini $E(\Sigma)$ (c-à-d Q et δ sont finis). Montrer que $L(\mathcal{A}) \cdot \varepsilon$ est un langage reconnaissable d'arbres sur Σ.

Exercice 3 (Automates cheminants)**.** Soit t un arbre binaire sur $\Sigma = \Sigma_2 \uplus \Sigma_0$ et u un nœud de t. Le *type* $\theta(u)$ de u dans $T = \{i, f\} \times \{0, 1, 2\}$ détermine si u est un nœud interne (i) ou une feuille (f), et s'il est le nœud racine (0) ou un fils gauche (1) ou un fils droit (2) dans t.

Un *automate cheminant* est un tuple $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, I, F\rangle$ où la relation de transition δ est incluse dans $Q \times \Sigma \times T \times Q \times \{\circlearrowleft, \uparrow, \swarrow, \searrow\}$.

Soit t un arbre de $T(\Sigma)$ et $\mathcal{A}$ un automate cheminant. Une configuration de $\mathcal{A}$ sur t est un couple (q, u) composé d'un état de $\mathcal{A}$ et d'un nœud u de t qui donne la position courante de l'automate dans l'arbre. Une configuration de $I \times \{\varepsilon\}$ est initiale et une configuration de $F \times \{\varepsilon\}$ est acceptante, c-à-d. que $\mathcal{A}$ commence et finit sa reconnaissance à la racine ε de l'arbre. Une configuration (q', v) suit (q, u), noté $(q, u) \to (q', v)$, s'il existe une transition $(q, l(u), \theta(u), q', d)$ dans δ et

- $u = v$ si $d = \circlearrowleft$,
- u est le père de $v = u0$ ou $v = u1$ si $d = \uparrow$,
- $u = v0$ est le fils gauche de v si $d = \swarrow$, et enfin
- $u = v1$ est le fils droit de v si $d = \searrow$.

1. Soit R un langage rationnel de mots sur Σ. Donner un automate d'arbre cheminant qui accepte un arbre s'il existe au moins une branche étiquetée par un mot de R.
2. Donner un automate cheminant pour l'ensemble des arbres dont toutes les feuilles sont étiquetées par a.
3. Montrer que les langages d'arbres reconnus par des automates cheminants sont fermés par union et intersection.
4. Soit R un langage rationnel de mots sur Σ_0. Donner un automate cheminant qui accepte un arbre binaire si sa frontière est dans R.
5. Montrer que si $L \subseteq T(\Sigma)$ est reconnu par un automate cheminant, alors L est un langage reconnaissable d'arbres.

Exercice 4 (Automates alternants)**.** Pour un ensemble d'éléments Q, on note $\mathbb{B}^+(Q)$ les formules booléennes positives non vides d'éléments de Q, par exemple une formule $p \wedge (q \vee r)$. On note $P \models \varphi$ si la valuation qui associe vrai aux éléments de P et faux aux éléments de $Q \backslash P$ satisfait φ.

Un *automate alternant* (de mots finis) est un tuple $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, I, F \rangle$ où

- Q est un ensemble fini d'états,
- Σ est un alphabet fini,
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathbb{B}^+(Q)$ est une fonction partielle de transition alternante,
- $I \in \mathbb{B}^+(Q)$ est la condition initiale,
- $F \subseteq Q$ est un ensemble d'états finals.

Une exécution de $\mathcal{A}$ sur un mot w est une forêt $t \subseteq \mathbb{N}^+$ étiquetée par des états de Q par $e : \mathbb{N}^+ \to Q$. L'ensemble $\mathbb{N} \cap t$ constitue l'ensemble des racines de la forêt. Pour un nœud $x \in \mathbb{N}^+$ d'une forêt t, l'ensemble de ses nœuds fils $x0$, $x1$, etc. est noté $\mathrm{Fils}(x) = \{xi \in t \mid i \in \mathbb{N}\}$. Si $xi \in t$ pour $x \in \mathbb{N}^+$ et $i \in \mathbb{N}$, alors $x \in t$, et si de plus $i > 0$, alors $x(i-1) \in t$.

La forêt étiquetée (t, e) pour $w = a_1 \ldots a_n \in \Sigma^*$ est alors telle que

- l'ensemble des racines $\mathbb{N} \cap t$ satisfait la condition initiale I,
- chaque nœud satisfait la relation de transition : pour tout nœud x à la profondeur $n \leq |w|$ (c'est-à-dire tel que $|x| = n + 1$), $e(\mathrm{Fils}(x)) \models \delta(e(x), a_i)$.

L'exécution accepte w ssi chaque feuille x de t vérifie $e(x) \in F$.

1. Montrer que, pour tout automate $\mathcal{A}$ fini, il existe un automate alternant $\mathcal{A}'$ équivalent de taille $O(|\mathcal{A}|)$.
2. Donner une caractérisation des exécutions sur $w = a_1 \ldots a_n$ d'un automate alternant qui utilise une séquence $P_1 \ldots P_{n+1}$ de sous-ensembles de Q.
3. Montrer que, pour tout automate alternant $\mathcal{A}$, il existe un automate fini $\mathcal{A}'$ équivalent. Quelle est la taille de l'automate obtenu ?

4. Montrer que, pour tout automate fini $\mathcal{A}$, il existe un automate alternant de taille $O(|\mathcal{A}|)$ pour le complémentaire de $L(\mathcal{A})$.
5. Montrer que le problème du vide des automates alternants est PSpace-complet.