TD 11 : Automates d'arbres

Exercice 1 (Clôture par les chemins)**.** Soit t un arbre de $T(\Sigma)$ d'arité maximale p. On définit le *langage des chemins* $\pi(t)$ de t sur $\Sigma \uplus \{1, \ldots, p\}$ par

$$\pi(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in \Sigma_0 \\ \bigcup_{i=1}^{n} \{fiw \mid w \in \pi(t_i)\} & \text{si } t = f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

$$\pi(L) = \bigcup_{t \in L} \pi(t)$$

et la *clôture par les chemins* de L comme

$$\mathsf{P}(L) = \{t \in T(\Sigma) \mid \pi(t) \subseteq \pi(L)\}$$

1. Montrer que si L est un langage reconnaissable d'arbres, alors $\pi(L)$ est un langage reconnaissable de mots.
2. Montrer que si L est un langage reconnaissable d'arbres, alors $\mathsf{P}(L)$ en est aussi un.
3. Montrer qu'un langage reconnaissable d'arbres est clos par les chemins (c-à-d. $L = \mathsf{P}(L)$) si et seulement s'il est reconnu par un automate descendant déterministe.
4. Peut-on décider si un langage reconnaissable d'arbres est clos par les chemins ?

Exercice 2 (Langages non reconnaissables)**.**

1. Montrer que l'ensemble des instances closes de $f(x, x)$ n'est pas reconnaissable.

Soit l'alphabet constitué de $\Sigma_0 = \{c\}$ et $\Sigma_2 = \{a, b\}$.

2. Montrer que l'ensemble des arbres de $T(\Sigma)$ en forme de « peigne »

$$a(c, a(c, a(\ldots a(c, b(c, b(c, b(\ldots b(c, c))))))))$$

ayant autant de a que de b n'est pas reconnaissable.

3. Montrer que l'ensemble des arbres de $T(\Sigma)$ ayant le même nombre de nœuds étiquetés par a et par b n'est pas reconnaissable.

Exercice 3 (Reconnaissance généralisée)**.** On considère le problème de décision suivant :

instance un terme t de $T(\Sigma, \mathcal{X})$ et un automate d'arbres $\mathcal{A}$

question est-ce qu'il existe une instance close de t acceptée par $\mathcal{A}$?

1. Montrer que si t est un terme linéaire, alors ce problème est dans PTime.

2. Montrer que si t n'est pas linéaire mais $\mathcal{A}$ est déterministe, alors ce problème est NP-complet (on pourra chercher une réduction depuis SAT).

Exercice 4 (Associativité)**.** Soit $\Sigma_2 = \{f\}$ et Σ_0 un ensemble fini de symboles d'arité 0. On note $\mathsf{A}(L)$ la clôture d'un langage L de $T(\Sigma)$ par $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$.

1. Soient $t_1 = f(f(a, \square), b)$ et $t_2 = f(a, b)$; montrer que $\mathsf{A}(t_1^* t_2)$ n'est pas reconnaissable.
2. Montrer que pour tout L de $T(\Sigma)$, on a $\mathrm{Fr}(L) = \mathrm{Fr}(\mathsf{A}(L))$, où $\mathrm{Fr}(L)$ dénote le langage des feuilles de L.
3. Montrer que pour tous L_1, L_2 de $T(\Sigma)$, $\mathrm{Fr}(L_1) \cap \mathrm{Fr}(L_2) = \mathrm{Fr}(\mathsf{A}(L_1) \cap \mathsf{A}(L_2))$.
4. Montrer que la famille des $\mathsf{A}(L)$ où L est un langage reconnaissable d'arbres n'est pas fermée par intersection.

Exercice 5 (Un seul arbre)**.** Montrer que le problème de décision suivant est dans PTIME :

instance un automate d'arbres $\mathcal{A}$

question est-ce que $|L(\mathcal{A})| = 1$?