TD 6 : Langages détermininistes, langages simples

Exercice 1 (Acceptation par pile vide).

1. Montrer qu'un langage L est déterministe et préfixe ($L \cap L\Sigma^+ = \emptyset$) ssi il existe un automate déterministe qui accepte L par pile vide.
2. Montrer que pour les automates à pile déterministes, l'acceptation par pile vide est équivalente à l'acceptation par pile vide *et* état final.

Exercice 2 (Familles d'automates déterministes). Pour rappel, un automate à pile $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F \rangle$ est

– *déterministe* si pour toute configuration (p, γ, w) de $Q \times Z^* \times \Sigma^*$ une seule règle de l'automate est applicable :

$$\forall (p, z, a) \in Q \times Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}),\ |T(p, z, a)| \leq 1$$
$$\forall (p, z, a) \in Q \times Z \times \Sigma,\ T(p, z, \varepsilon) \neq \emptyset \Rightarrow T(p, z, a) = \emptyset\ ,$$

– *temps-réel* s'il n'a pas d'ε-transition :

$$T \subseteq Q \times Z \times \Sigma \times Q \times Z^*\ ,$$

– *simple* s'il a un seul état :

$$Q = \{q\}\ .$$

On appelle *machine simple* un automate déterministe temps réel simple qui accepte par pile vide, et un *langage simple* un langage reconnu par une machine simple.

On souhaite comparer différentes familles de langages déterministes.

1. Montrer que le langage

$$L_1 = \{a^n b^i c b^j a^n \mid i \geq j > 0, n > 0\}$$

peut être reconnu par un automate à pile déterministe. Pourquoi ne peut-il pas être reconnu par un automate à pile déterministe temps réel ?

2. Montrer que le langage

$$L_2 = \{a^n b a^m b \mid n > m \geq 0\}$$

peut être reconnu par un automate à pile déterministe temps réel. Pourquoi ne peut-il pas être reconnu par un automate à pile déterministe temps réel qui accepte par pile vide ?

3. Montrer que le langage

$$L_3 = \{a^n c b^n c \mid n > 0\} \cup \{a^n d b^n d \mid n > 0\}$$

peut être reconnu par un automate à pile déterministe temps réel qui accepte par pile vide. Pourquoi ne peut-il pas être reconnu par une machine simple ?

Exercice 3 (Grammaires simples)**.** Une grammaire algébrique G sous forme normale de Greibach est *simple* si pour tout nonterminal A, chaque règle $A \to a\alpha$ de G commence par un symbole a de Σ différent :

$$\forall (A, a) \in N \times \Sigma,\ |\{A \to a\alpha \in P\}| \leq 1\ .$$

1. Montrer qu'un langage est simple si et seulement s'il est généré par une grammaire simple.
2. Soit \$ un symbole distinct de l'alphabet terminal. Montrer que le langage $D_n^*\$$ est simple.

Exercice 4 (Langages rationnels et langages simples)**.**

1. Montrer que tout langage de la forme $R\$$, où R est un langage rationnel sur Σ et $\$ \notin \Sigma$ un marqueur de fin, est simple sur $\Sigma \uplus \{\$\}$.
2. Montrer que les langages simples sur $\Sigma \uplus \{\$\}$ ne sont pas clos par union avec un langage de la forme $R\$$.
3. Montrer que les langages simples sur $\Sigma \uplus \{\$\}$ ne sont pas clos par intersection avec un langage de la forme $R\$$.

Exercice 5 (Décidabilité)**.** Si une question est indécidable pour les langages simples, elle l'est aussi pour les langages déterministes. Et inversement, les résultats de décidabilité des langages simples ont le bon goût d'être assez semblables (mais beaucoup plus simples !) à ceux des langages déterministes.

1. Montrer que si L est un langage rationnel généré par une grammaire simple et réduite G, alors il n'existe pas de non terminal A de N et de chaînes α et β de $(N \uplus \Sigma)^+$ non vides tels que $A \Rightarrow^+ \alpha A \beta$.
2. En déduire un algorithme pour décider si un langage simple est rationnel.
3. Montrer que si L_1 et L_2 sont deux langages simples arbitraires, on ne peut pas décider si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

Parmi les résultats que l'on ne démontrera pas : si L_1 et L_2 sont deux langages simples, il est indécidable si $L_1 \subseteq L_2$, mais il est décidable si $L_1 = L_2$.

Exercice 6 (Ambiguïté)**.** On souhaite montrer que si L est un langage déterministe, alors il existe une grammaire non ambiguë pour L.

1. Soit $\$ \notin \Sigma$ un nouveau symbole. Montrer que si L est un langage déterministe sur Σ, alors $L\$$ est un langage déterministe sur $\Sigma \uplus \{\$\}$.
2. Montrer que dans ce cas il existe une grammaire non ambiguë pour $L\$$.
3. Conclure.