TD 5 : Automates à pile

Exercice 1 (Exemples d'automates à pile)**.** Donner un automate à pile $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F\rangle$ pour chacun des trois langages suivants et justifier sa correction :

$$L_{\text{pal}} = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$$
$$L_2 = \overline{L_{\text{pal}}}$$
$$L_3 = \overline{L_{\text{copie}}} \qquad \text{où } L_{\text{copie}} = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$$

Exercice 2 (Formes particulières)**.**

1. Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F\rangle$ un automate à pile. Montrer que l'on peut construire un automate à pile $\mathcal{A}'$ équivalent avec une relation de transition $T' \subseteq Q' \times Z' \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q' \times Z'^{\leq 2}$.
2. Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F\rangle$ un automate à pile. Montrer que l'on peut construire un automate à pile $\mathcal{A}'$ équivalent où les transitions sont de la forme

$$(q, z, x, q', zz') \qquad (\textit{push})$$
$$(q, z, x, q', \varepsilon) \qquad (\textit{pop})$$

où q et q' sont des états de Q', z et z' des symboles de Z', et x un symbole de $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

Exercice 3 (Systèmes de réécriture)**.** On considère pour cet exercice des *systèmes de réécriture* sur un alphabet

$$(Z \cup \Sigma) \uplus \{\|\}$$

composé de symboles de pile dans Z et d'entrée dans Σ (non forcément disjoints), et d'un délimiteur $\|$. L'ensemble fini P des règles du système est composé de règles de la forme

$$\alpha\|xy \to \beta\|y$$

où α et β sont des chaînes de Z^* et x et y de Σ^*.

Une *configuration* du système est une chaîne de la forme $\gamma\|w$ avec γ dans Z^* et w dans Σ^*. La relation de réécriture $\to$ entre configurations est définie par

$$\gamma\alpha\|xyz \to \gamma\beta\|yz \text{ ssi } \alpha\|xy \to \beta\|y \in P\ .$$

On associe à un système une chaîne initiale γ_s de Z^* et un ensemble fini de chaînes finales $F \subseteq Z^*$. Une configuration du système est initiale si elle est de la forme $\gamma_s\|w$ avec w dans Σ^*, et finale si elle est de la forme $\gamma_f\|$ avec γ_f dans F.

Le langage reconnu par un système $\mathcal{R} = \langle Z, \Sigma, \|, P, \gamma_s, F\rangle$ est alors

$$L(\mathcal{R}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists \gamma_f \in F,\ \gamma_s\|w \to^* \gamma_f\|\}\ .$$

Ces systèmes de réécriture généralisent les automates à pile, sans pour autant accroître la classe des langages reconnus.

1. Montrer que pour tout automate à pile $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F\rangle$ on peut construire un système de réécriture $\mathcal{R} = \langle Z', \Sigma, \|, P, \gamma_s, F'\rangle$ équivalent.
2. Montrer que pour tout système de réécriture $\mathcal{R} = \langle Z, \Sigma, \|, P, \gamma_s, F\rangle$ on peut construire un automate à pile $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F'\rangle$ équivalent.

Exercice 4 (Calculs d'accessibilité)**.** Soit $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F\rangle$ un automate à pile. Montrer que l'on peut effectivement calculer les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
Y &= \{(p, x, q, y) \in Q \times Z \times Q \times Z \mid \exists (p, x) \to^+ (q, hy) \text{ dans } \mathcal{T}\}\\
V &= \{(p, x) \in Q \times Z \mid \exists\ (p, x) \to^\omega \text{ dans } \mathcal{T}\}\\
W &= \{(p, x, q, y) \in Q \times Z \times Q \times Z \mid \exists\ (p, x) \to^+ (q, y) \text{ dans } \mathcal{T}\}\\
X' &= \{(p, x, q) \in Q \times Z \times Q \mid \exists (p, x) \xrightarrow{\varepsilon}{}^+ (q, \varepsilon) \text{ dans } \mathcal{T}\}\\
V' &= \{(p, x) \in Q \times Z \mid \exists (p, x) \xrightarrow{\varepsilon}{}^\omega \text{ dans } \mathcal{T}\}
\end{aligned}$$