TD 2 : Grammaires syntagmatiques et contextuelles

Notations

- Une grammaire *syntagmatique* (générale, de type 0, etc.) est un tuple $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ où $V = N \uplus \Sigma$ et $P \subseteq V^+ \times V^*$.
- Une telle grammaire est *monotone* si pour toute production $\alpha \to \beta$ de P, $|\alpha| \leq |\beta|$ ou $\alpha = S$ et $\beta = \varepsilon$ (et dans ce cas S n'apparaît dans la partie droite d'aucune règle).
- Elle est *contextuelle avec effacement* si toute règle de P est de la forme $\alpha_1 A \alpha_2 \to \alpha_1 \beta \alpha_2$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ dans V^* et A dans N.
- Elle est *contextuelle* (contextuelle sous forme normale, de type 1, etc.) si β est pris dans V^+ ou $\alpha_1 = \alpha_2 = \varepsilon$ et $A = S$ (et dans ce cas S n'apparaît dans la partie droite d'aucune règle).

Exercice 1 (Exemples de langages)**.**

1. Donner une grammaire monotone pour le langage $\{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$.
2. Même question pour le langage $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Exercice 2 (Équivalence entre grammaires)**.**

1. Montrer que pour toute grammaire syntagmatique (resp. monotone, contextuelle avec effacement, contextuelle) G, il existe une grammaire G' syntagmatique (resp. monotone, contextuelle avec effacement, contextuelle) équivalente telle que les règles de P' soient (de plus) de la forme

$$\alpha \to \beta \text{ avec } \alpha \in N^+ \text{ et } \beta \in N^*, \text{ ou de la forme}$$
$$A \to a \text{ avec } A \in N \text{ et } a \in \Sigma.$$

2. Montrer que pour toute grammaire monotone G, il existe une grammaire monotone G' équivalente telle que, si $\alpha \to \beta$ est une règle de P', alors $|\beta| \leq 2$ et $\alpha \in N^+$.
3. En déduire que pour toute grammaire monotone G, il existe une grammaire contextuelle G' équivalente.
4. Étendre la démonstration précédente pour montrer que pour toute grammaire syntagmatique G, il existe une grammaire contextuelle avec effacement G' équivalente.

Exercice 3 (Équivalence avec machine)**.** Une machine de Turing est dite linéairement bornée (*linear bounded automaton*, LBA) si elle n'écrit pas en dehors de l'espace utilisé par la donnée. Montrer qu'un langage est généré par une grammaire contextuelle si et seulement s'il est reconnu par une machine linéairement bornée.