Devoir 1 : Automates étendus

À rendre le 11 mars 2009 à minuit au plus tard.

			25	26	27	28	
Mars 2009							1
	2	3	4	5	6	7	8
	9	10	11				

Ce devoir est l'occasion d'étudier quelques généralisations des automates finis.

Définition 1 (Automate étendu)**.** Un *automate étendu* $\mathcal{A}$ sur $M \times \Sigma^*$ est un tuple $\langle Q, M, \Sigma, \delta, I, F \rangle$, composé d'un ensemble fini d'états Q, d'un monoïde M d'élément neutre 1_M pour l'opération $\odot$, d'un alphabet fini Σ, d'une relation de transition finie $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times M \times Q$ où ε représente le mot vide, et d'un ensemble initial $I \subseteq Q$ et d'un ensemble final $F \subseteq Q$.

On définit les *configurations* d'un automate étendu comme des éléments de $Q \times M$, une configuration initiale étant dans $I \times \{1_M\}$ et une finale dans $F \times \{1_M\}$, avec une relation de transition $\to$ entre configurations définie par

$$(q, m) \xrightarrow{a,m'} (q', m \odot m') \text{ si } (q, a, m', q') \in \delta$$

avec m et m' dans M, a dans $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$ et q et q' dans Q. On étend naturellement la relation de transition à des séquences de transitions. Le *langage* d'un automate étendu est alors

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q_s \in I, q_f \in F, (q_s, 1_M) \xrightarrow{w,1_M} (q_f, 1_M)\} .$$

Exercice 1 (Automates à compteurs dans $\mathbb{Z}$ sans test à zéro)**.** Dans cet exercice, le monoïde associé à l'automate étendu est $\mathbb{Z}^n$ muni de l'addition, avec $(0, \ldots, 0) = \bar{0}$ comme élément neutre. On appelle un automate sur $\mathbb{Z}^n \times \Sigma^*$ un $\mathbb{Z}^n$*-automate*.

1. Soit $\bar{e}_i$ le vecteur de $\mathbb{Z}^n$ avec 1 en position i, $1 \leq i \leq n$, et 0 pour toutes les autres coordonnées. Montrer que l'on peut se contenter d'utiliser les vecteurs $\bar{e}_i$, $-\bar{e}_i$ et $\bar{0}$ dans les transitions d'un $\mathbb{Z}^n$-automate.
2. Donner un $\mathbb{Z}$-automate pour le langage

$$D_0 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$$

   des mots ayant autant d'occurrences de a et de b.
3. Montrer que tout langage L d'un $\mathbb{Z}^n$-automate est la projection de l'intersection de n langages de $\mathbb{Z}$-automates.

4. Soit
$$D_1^* = \{w \in D_0 \mid w = uv \text{ implique } |u|_a \geq |u|_b\}$$
le langage des mots de Dyck sur une sorte de parenthèses. On veut montrer que D_1^* n'est pas reconnu par un $\mathbb{Z}^n$-automate.
   (a) Soit une exécution reconnaissant $w = w_1w_2w_3w_4w_5$ de la forme
$$(q_s, \bar{0}) \xrightarrow{w_1,\bar{x}_2} (p, \bar{x}_2) \xrightarrow{w_2,\bar{x}_3-\bar{x}_2} (q, \bar{x}_3) \xrightarrow{w_3,\bar{x}_4-\bar{x}_3} (p, \bar{x}_4) \xrightarrow{w_4,\bar{x}_5-\bar{x}_4} (q, \bar{x}_5) \xrightarrow{w_5,-\bar{x}_5} (q_f, \bar{0})$$
   dans un $\mathbb{Z}^n$-automate $\mathcal{A}$, avec q_s dans I, p et q dans Q, q_f dans F, w_i dans Σ^* pour i de 1 à 5, et $\bar{x}_i$ dans $\mathbb{Z}^n$ pour i de 2 à 5.
   Montrer que $\mathcal{A}$ reconnaît aussi le mot $w_1w_4w_3w_2w_5$.
   (b) Conclure.

Exercice 2 (Automates à compteurs dans $\mathbb{N}$ sans test à zéro)**.** Soit l'alphabet $\Gamma = \{z\}$. On considère dans cet exercice le monoïde bicyclique B généré par les deux applications partielles
$$\text{push} : \Gamma^* \to \Gamma^* : w \mapsto wz$$
$$\text{pop} : \Gamma^* \to \Gamma^* : wz \mapsto w\ .$$
L'élément neutre de ce monoïde est l'application identité id = push ∘ pop. On appelle un automate sur $B^n \times \Sigma$ un *B^n-automate*.

1. Montrer que le langage D_1^* est accepté par un B-automate.
2. Montrer que le langage $\{a^ib^ic^i \mid i \geq 0\}$ est reconnu par un B^n-automate.
3. Montrer que tout langage accepté par un $\mathbb{Z}^n$-automate est aussi accepté par un B^m-automate.
4. Montrer que tout langage reconnu par un B^n-automate l'est aussi par un B^m-automate avec un seul état et un élément initial $\bar{e}_i$ de B^m de la forme
$$\bar{e}_i = (\text{id}, \ldots, \text{id}, \text{push}, \text{id}, \ldots, \text{id})$$
avec push en i-ème coordonnée et id pour toutes les autres coordonnées, et un élément final $\bar{e}_j$ (au lieu de $\overline{\text{id}}$).
5. Le langage
$$L_{\text{miroir}} = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$
où w^R représente le mot miroir de w n'est reconnu par aucun B^n-automate. Nous allons en donner une preuve combinatoire dans le cas plus simple d'un B^n-automate avec un seul état et dont les transitions opèrent sur Σ au lieu de $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

(a) Soit $\mathcal{A}$ un B^n-automate avec un seul état q qui permet deux exécutions

$$(q, \overline{e_i}) \xrightarrow{w_1, \bar{x}} (q, \overline{e_i} \circ \bar{x}) \xrightarrow{cw_1^R, \bar{y}} (q, \overline{e_j})$$
$$(q, \overline{e_i}) \xrightarrow{w_2, \bar{x}} (q, \overline{e_i} \circ \bar{x}) \xrightarrow{cw_2^R, \bar{y}} (q, \overline{e_j})$$

où $\overline{e_i}$ est le vecteur initial, $\overline{e_j}$ le vecteur final, $\bar{x}$ et $\bar{y}$ deux vecteurs de B^n et $w_1 \neq w_2$ sont deux chaînes distinctes de $\{a, b\}^k$.
Montrer que $\mathcal{A}$ ne reconnaît pas L_{miroir}.

(b) Il nous reste à montrer que la situation précédente est inévitable pourvu que k soit assez grand. Soit $\mathcal{A}$ un B^n-automate ayant un seul état q, avec toutes ses transitions sur $B^n \times \Sigma$. On considère l'ensemble $C_k(\mathcal{A})$ des vecteurs de B^n accessibles en lisant un mot de $\{a, b\}^k$:

$$C_k(\mathcal{A}) = \{\bar{x} \in B^n \mid \exists w \in \{a, b\}^k,\ (q, \overline{e_i}) \xrightarrow{w, \bar{x}} (q, \overline{e_i} \circ \bar{x})\}\ .$$

Soit $m = |\delta|$ le nombre de transitions distinctes de $\mathcal{A}$. Montrer que

$$|C_k(\mathcal{A})| < (k + m)^m\ .$$

(c) Conclure.

Exercice 3 (Automates à pile)**.** Soit un alphabet Γ fini non vide. On considère comme dans l'exercice précédent les applications partielles

$$\text{push}_z : \Gamma^* \to \Gamma^* : w \mapsto wz$$
$$\text{pop}_z : \Gamma^* \to \Gamma^* : wz \mapsto w$$

pour chaque élément z de Γ, qui génèrent maintenant le monoïde polycyclique $P(\Gamma)$. L'élément neutre de ce monoïde est l'application identité $\text{id} = \text{push}_z \circ \text{pop}_z$, et l'application vide $\text{push}_{z_1} \circ \text{pop}_{z_2}$ avec $z_1 \neq z_2$ dans Γ en est un zéro.

1. Donner un automate étendu sur $P(\Gamma) \times \Sigma^*$ pour le langage L_{miroir}.
2. Quel lien y a-t'il entre un automate à pile et un automate étendu sur $P(\Gamma) \times \Sigma^*$? Entre $P(\Gamma)$ et D_n^* le langage des mots de Dyck sur n sortes de parenthèses ?