Langages algébriques : problèmes de décision, lemmes d'itération

---

Exercice 1 (Problèmes de décision pour les langages algébriques)

1. Montrer que l'appartenance d'un mot à un langage algébrique est décidable.
2. Montrer les problèmes du vide et de finitude sont décidables pour un langage algébrique.
3. En codant la suite des exécutions d'une machine de Turing, montrer que pour 2 grammaires algébriques G_1 et G_2, tester si $L(G_1) \cap L(G_2)$ est vide est indécidable.
4. En utilisant la même technique montrer que l'universalité est indécidable pour les langages algébriques.

Exercice 2 (Lemme de pompage)

1. Montrer le lemme suivant :
   Si L est un langage algébrique, il existe un entier K_L tel que tout mot w de L de longueur supérieure à K_L puisse se factoriser sous la forme $w = \alpha u \beta v \gamma$ avec :
   – $|uv| \geq 1$
   – $|u\beta v| \leq K_L$
   – pour tout entier i, le mot $\alpha u^i \beta v^i \gamma$ est dans L.
2. Montrer que le langage $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ n'est pas algébrique
3. Montrer que l'ensemble des langages algébriques n'est pas clos par intersection et complémentaire.

Exercice 3 (Les langages algébriques sur une lettre sont rationnels)

Soient L un langage algébrique de a^* et K_L la constante du lemme de pompage.

1. Montrer que le ppcm p des entiers $1, 2, ..., K_L$ satisfait la propriété suivante : pour tout mot $w \in L$, $|w| \geq K_L + 1$, on a : $w(a^p)^* \subseteq L$.

2. On pose $A_i = a^{K_L+i}(a^p)^* \cap L$ pour tout $i, 1 \leq i \leq p$. Montrer que pour tout mot $w \in L$ tel que $|w| \geq K_L + 1$, il existe un i tel que $w \in y_i(a^p)^*$ où y_i est le plus court mot de A_i.
3. En déduire que L est rationnel.

Exercice 4 (Lemme d'Ogden)

1. Montrer le lemme suivant :
   Soit $G = (\Sigma, V, P, S)$ une grammaire, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in V$ et $w \in L_G(x)$ contenant au moins N lettres marquées, il existe $y \in V$ et $\alpha, u, \beta, v, \gamma \in (\Sigma \cup V)^*$ tels que :
   - $w = \alpha u \beta v \gamma$
   - $x \to^* \alpha y \gamma$, $y \to^* uyv$, $y \to^* \beta$
   - $u\beta v$ contient moins de N lettres marquées
   - soit α, u, β contiennent tous des lettres marquées, soit β, v, γ contiennent tous des lettres marquées.
2. Montrer que $\{a^i b^j c^k d^l \mid i = 0 \text{ ou } j = k = l\}$ satisfait le lemme de pompage mais pas le lemme d'Ogden.
3. En utilisant le mot $a^n b^{n+n!} c^{n+2n!}$ montrer que le langage $\{a^i b^j c^k \mid i \neq j, j \neq k \text{ et } i \neq k\}$ n'est pas algébrique.
4. Montrer que le langage $\{a^n b^n c^p d^p \mid n, p \geq 0\}$ est algébrique mais pas linéaire.
