Première partie I

Grammaires algébriques

Langage, [lɑ̃gaːʒ], n. m. :

1. Faculté ou système
   - 1.1 Faculté d'expression
   - 1.2 Système de signes
     - 1.2.1 Naturel
     - 1.2.2 Artificiel
2. Moyen d'expression

Langage, [lãgaːʒ], n. m. :

1. Faculté ou système
   - 1.1 Faculté d'expression
   - 1.2 Système de signes
     - 1.2.1 Naturel
     - 1.2.2 Artificiel
2. Moyen d'expression

Langage, [lãgaːʒ], n. m. :

1. Faculté ou système
   - 1.1 Faculté d'expression
   - 1.2 Système de signes
     - 1.2.1 Naturel
     - 1.2.2 Artificiel
2. Moyen d'expression

Langage, [lãgaːʒ], n. m. :

1. Faculté ou système
   - 1.1 Faculté d'expression
   - 1.2 Système de signes
     - 1.2.1 Naturel
     - 1.2.2 Artificiel
2. Moyen d'expression

Syntaxe valide

Exemple

- Cet artiste peint la nuit.
- *Cet artiste la nuit peint.
- La nuit, cet artiste peint.

Syntaxe valide... ou non

Exemple

- Cet artiste peint la nuit.
- *Cet artiste la nuit peint.
- La nuit, cet artiste peint.

Syntaxe valide... ou non

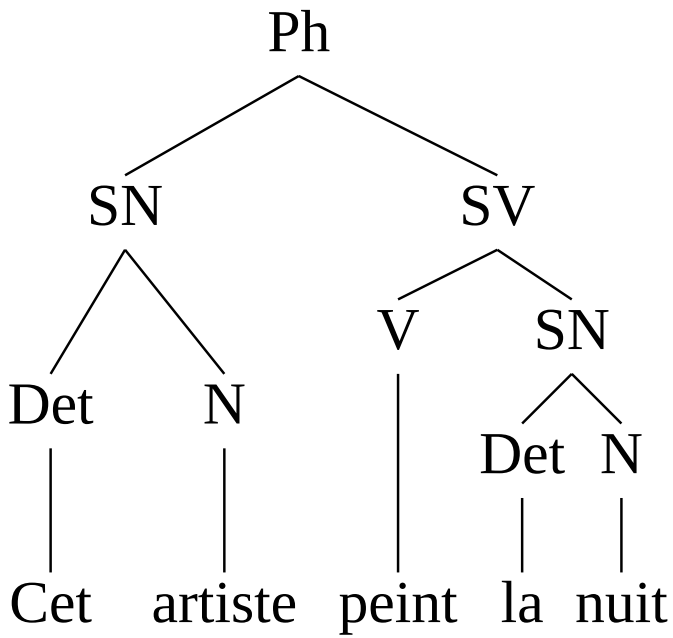
Exemple

- Cet artiste peint la nuit.
- *Cet artiste la nuit peint.
- La nuit, cet artiste peint.

Formaliser permet de reconnaître exactement ce qui est valide.

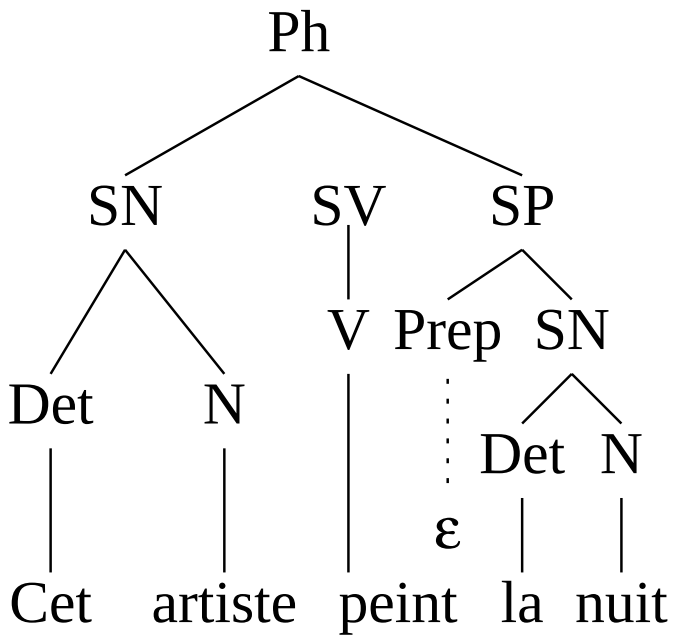
Structure syntaxique

Exhiber une structure donne une interprétation sémantique.

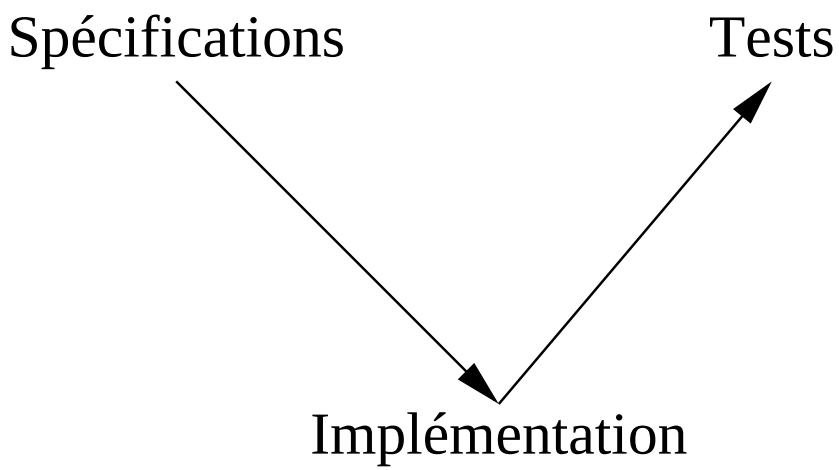


Structure syntaxique

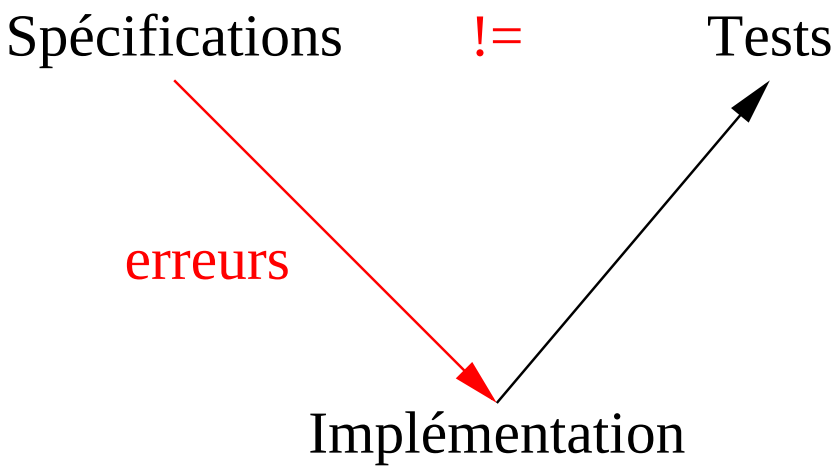
Exhiber une structure donne une interprétation sémantique.



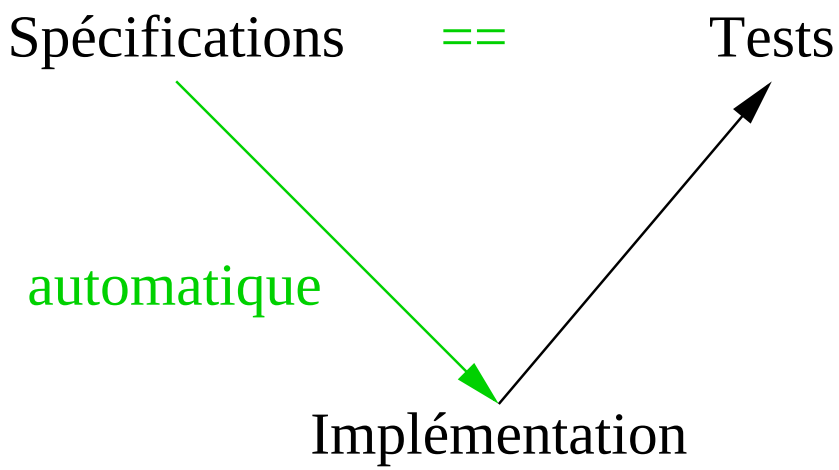
Cycle de développement



Cycle de développement



Cycle de développement



En bref

- Formaliser
- Exhiber la structure
- Permettre de dériver un analyseur

Langages

Monoïdes

Langages formels

Opérations sur les langages

En bref

- Formaliser
- Exhiber la structure
- Permettre de dériver un analyseur

Langages

- Monoïdes
- Langages formels
- Opérations sur les langages

Systèmes de réécriture

- Définitions
- Grammaires
- Grammaires algébriques
- Analyseurs

En bref

- Formaliser
- Exhiber la structure
- Permettre de dériver un analyseur

Langages

Définition

Un langage formel sur un alphabet Σ est un sous-ensemble du monoïde libre $\langle \Sigma^*, \cdot, \varepsilon \rangle$ généré par Σ.

Langages

Définition

Un langage formel sur un alphabet Σ est un sous-ensemble du monoïde libre $\langle \Sigma^*, \cdot, \varepsilon \rangle$ généré par Σ.

- Σ est un ensemble fini non vide

Langages

Définition

Un langage formel sur un alphabet Σ est un sous-ensemble du monoïde libre $\langle \Sigma^*, \cdot, \varepsilon \rangle$ généré par Σ.

- Σ est un ensemble fini non vide
- $\cdot$ est une opération de concaténation associative $: \cdot : \Sigma^* \times \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ vérifie

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Langages

Définition

Un langage formel sur un alphabet Σ est un sous-ensemble du monoïde libre $\langle \Sigma^*, \cdot, \varepsilon \rangle$ généré par Σ.

- Σ est un ensemble fini non vide
- $\cdot$ est une opération de concaténation associative
- ε est son identité

$$x \in \Sigma^* \text{ implique } \varepsilon \cdot x = x \cdot \varepsilon = x$$

Langages

Définition

Un langage formel sur un alphabet Σ est un sous-ensemble du monoïde libre $\langle \Sigma^*, \cdot, \varepsilon \rangle$ généré par Σ.

- Σ est un ensemble fini non vide
- $\cdot$ est une opération de concaténation associative
- ε est son identité
- Σ^* est la fermeture de Σ

$$\Sigma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n$$

Langages

Définition

Un langage formel sur un alphabet Σ est un sous-ensemble du monoïde libre $\langle \Sigma^*, \cdot, \varepsilon \rangle$ généré par Σ.

- Σ est un ensemble fini non vide
- $\cdot$ est une opération de concaténation associative
- ε est son identité
- Σ^* est la fermeture de Σ

Exemple

Soit $\Sigma = \{a, b\}$; $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ et $\{ww \mid w \in \Sigma^*\}$ sont des langages.

Le français comme un ensemble

Exemple

$$\Sigma = \{\text{Adj}, \text{Adv}, \text{Det}, \text{N}, \text{Prep}, \text{V}\},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{français}} = \{&\text{Det N V},\\ &\text{Det Adj N V},\\ &\text{Det N V Adj},\\ &\text{Det Adj N V Adj},\\ &\text{Det N V Det N},\\ &\dots\}.\end{aligned}$$

Le français comme un ensemble

Exemple

$$\Sigma = \{\text{Adj}, \text{Adv}, \text{Det}, \text{N}, \text{Prep}, \text{V}\},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{français}} = \{&\text{Det N V},\\ &\text{Det Adj N V},\\ &\text{Det N V Adj},\\ &\text{Det Adj N V Adj},\\ &\text{Det N V Det N},\\ &\dots\}.\end{aligned}$$

Le français comme un ensemble

Exemple

$$\Sigma = \{\text{Adj}, \text{Adv}, \text{Det}, \text{N}, \text{Prep}, \text{V}\},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{français}} = \{&\text{Det N V},\\ &\text{Det Adj N V},\\ &\text{Det N V Adj},\\ &\text{Det Adj N V Adj},\\ &\text{Det N V Det N},\\ &\ldots\}.\end{aligned}$$

Le français comme un ensemble

Exemple

$$\Sigma = \{\text{Adj}, \text{Adv}, \text{Det}, \text{N}, \text{Prep}, \text{V}\},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{français}} = \{&\text{Det N V},\\ &\text{Det Adj N V},\\ &\text{Det N V Adj},\\ &\text{Det Adj N V Adj},\\ &\text{Det N V Det N},\\ &\dots\}.\end{aligned}$$

... pas très pratique... et aucune structure !

Opérations

- opérations ensemblistes (union, intersection, complément) : $\cup, \cap, -$,
- concaténation (ou produit cartésien) : $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 = \{xy \mid x \in \mathcal{L}_1, y \in \mathcal{L}_2\}$, étendue par $\mathcal{L}^0 = \{\varepsilon\}$ et, pour $i \geq 0$, $\mathcal{L}^{i+1} = \mathcal{L}^i\mathcal{L}$,
- étoile de Kleene : $\mathcal{L}^* = \cup_{i\geq 0}\mathcal{L}^i$,
- plus de Kleene : $\mathcal{L}^+ = \cup_{i\geq 1}\mathcal{L}^i$,
- quotient gauche : $\mathcal{L}_2\backslash\mathcal{L}_1 = \{w \mid \exists x \in \mathcal{L}_2, xw \in \mathcal{L}_1\}$,
- quotient droit : $\mathcal{L}_1/\mathcal{L}_2 = \{w \mid \exists x \in \mathcal{L}_2, wx \in \mathcal{L}_1\}$,
- ...

Opérations

- opérations ensemblistes (union, intersection, complément) : $\cup, \cap, -$,
- concaténation (ou produit cartésien) : $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 = \{xy \mid x \in \mathcal{L}_1, y \in \mathcal{L}_2\}$, étendue par $\mathcal{L}^0 = \{\varepsilon\}$ et, pour $i \geq 0$, $\mathcal{L}^{i+1} = \mathcal{L}^i\mathcal{L}$,
- étoile de Kleene : $\mathcal{L}^* = \cup_{i \geq 0}\mathcal{L}^i$,
- plus de Kleene : $\mathcal{L}^+ = \cup_{i \geq 1}\mathcal{L}^i$,
- quotient gauche : $\mathcal{L}_2 \backslash \mathcal{L}_1 = \{w \mid \exists x \in \mathcal{L}_2, xw \in \mathcal{L}_1\}$,
- quotient droit : $\mathcal{L}_1 / \mathcal{L}_2 = \{w \mid \exists x \in \mathcal{L}_2, wx \in \mathcal{L}_1\}$,
- ...

Opérations

- opérations ensemblistes (union, intersection, complément) : $\cup, \cap, -$,
- concaténation (ou produit cartésien) : $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 = \{xy \mid x \in \mathcal{L}_1, y \in \mathcal{L}_2\}$, étendue par $\mathcal{L}^0 = \{\varepsilon\}$ et, pour $i \geq 0$, $\mathcal{L}^{i+1} = \mathcal{L}^i\mathcal{L}$,
- étoile de Kleene : $\mathcal{L}^* = \cup_{i \geq 0}\mathcal{L}^i$,
- plus de Kleene : $\mathcal{L}^+ = \cup_{i \geq 1}\mathcal{L}^i$,
- quotient gauche : $\mathcal{L}_2 \backslash \mathcal{L}_1 = \{w \mid \exists x \in \mathcal{L}_2, xw \in \mathcal{L}_1\}$,
- quotient droit : $\mathcal{L}_1 / \mathcal{L}_2 = \{w \mid \exists x \in \mathcal{L}_2, wx \in \mathcal{L}_1\}$,
- ...

Opérations

- opérations ensemblistes (union, intersection, complément) : $\cup, \cap, -$,
- concaténation (ou produit cartésien) : $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 = \{xy \mid x \in \mathcal{L}_1, y \in \mathcal{L}_2\}$, étendue par $\mathcal{L}^0 = \{\varepsilon\}$ et, pour $i \geq 0$, $\mathcal{L}^{i+1} = \mathcal{L}^i\mathcal{L}$,
- étoile de Kleene : $\mathcal{L}^* = \cup_{i\geq 0}\mathcal{L}^i$,
- plus de Kleene : $\mathcal{L}^+ = \cup_{i\geq 1}\mathcal{L}^i$,
- quotient gauche : $\mathcal{L}_2\backslash\mathcal{L}_1 = \{w \mid \exists x \in \mathcal{L}_2, xw \in \mathcal{L}_1\}$,
- quotient droit : $\mathcal{L}_1/\mathcal{L}_2 = \{w \mid \exists x \in \mathcal{L}_2, wx \in \mathcal{L}_1\}$,
- ...

Opérations

- opérations ensemblistes (union, intersection, complément) : $\cup, \cap, -$,
- concaténation (ou produit cartésien) : $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 = \{xy \mid x \in \mathcal{L}_1, y \in \mathcal{L}_2\}$, étendue par $\mathcal{L}^0 = \{\varepsilon\}$ et, pour $i \geq 0$, $\mathcal{L}^{i+1} = \mathcal{L}^i\mathcal{L}$,
- étoile de Kleene : $\mathcal{L}^* = \cup_{i \geq 0}\mathcal{L}^i$,
- plus de Kleene : $\mathcal{L}^+ = \cup_{i \geq 1}\mathcal{L}^i$,
- quotient gauche : $\mathcal{L}_2 \backslash \mathcal{L}_1 = \{w \mid \exists x \in \mathcal{L}_2, xw \in \mathcal{L}_1\}$,
- quotient droit : $\mathcal{L}_1 / \mathcal{L}_2 = \{w \mid \exists x \in \mathcal{L}_2, wx \in \mathcal{L}_1\}$,
- ...

Opérations

- opérations ensemblistes (union, intersection, complément) : $\cup, \cap, -$,
- concaténation (ou produit cartésien) : $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 = \{xy \mid x \in \mathcal{L}_1, y \in \mathcal{L}_2\}$, étendue par $\mathcal{L}^0 = \{\varepsilon\}$ et, pour $i \geq 0$, $\mathcal{L}^{i+1} = \mathcal{L}^i\mathcal{L}$,
- étoile de Kleene : $\mathcal{L}^* = \cup_{i \geq 0}\mathcal{L}^i$,
- plus de Kleene : $\mathcal{L}^+ = \cup_{i \geq 1}\mathcal{L}^i$,
- quotient gauche : $\mathcal{L}_2 \backslash \mathcal{L}_1 = \{w \mid \exists x \in \mathcal{L}_2, xw \in \mathcal{L}_1\}$,
- quotient droit : $\mathcal{L}_1 / \mathcal{L}_2 = \{w \mid \exists x \in \mathcal{L}_2, wx \in \mathcal{L}_1\}$,
- ...

Opérations

- opérations ensemblistes (union, intersection, complément) : $\cup, \cap, -$,
- concaténation (ou produit cartésien) : $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 = \{xy \mid x \in \mathcal{L}_1, y \in \mathcal{L}_2\}$, étendue par $\mathcal{L}^0 = \{\varepsilon\}$ et, pour $i \geq 0$, $\mathcal{L}^{i+1} = \mathcal{L}^i\mathcal{L}$,
- étoile de Kleene : $\mathcal{L}^* = \cup_{i\geq 0}\mathcal{L}^i$,
- plus de Kleene : $\mathcal{L}^+ = \cup_{i\geq 1}\mathcal{L}^i$,
- quotient gauche : $\mathcal{L}_2\backslash\mathcal{L}_1 = \{w \mid \exists x \in \mathcal{L}_2, xw \in \mathcal{L}_1\}$,
- quotient droit : $\mathcal{L}_1/\mathcal{L}_2 = \{w \mid \exists x \in \mathcal{L}_2, wx \in \mathcal{L}_1\}$,
- ...

Diviser pour régner

Exemple

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{français}} &= \mathcal{L}_{\text{Ph}}^{+} \\
\mathcal{L}_{\text{Ph}} &= \mathcal{L}_{\text{SN}}\mathcal{L}_{\text{SV}} \\
&\quad \cup \mathcal{L}_{\text{SN}}\mathcal{L}_{\text{SV}}\mathcal{L}_{\text{SP}} \\
&\quad \cup \dots \\
\mathcal{L}_{\text{SN}} &= \{\text{Det}\}\mathcal{L}_{\text{SA}}\{\text{N}\}\mathcal{L}_{\text{SA}} \\
\mathcal{L}_{\text{SV}} &= \{\text{V}\} \\
&\quad \cup \{\text{V}\}\mathcal{L}_{\text{SA}} \\
&\quad \cup \{\text{V}\}\mathcal{L}_{\text{SN}} \\
&\quad \cup \dots \\
\mathcal{L}_{\text{SA}} &= \{\text{Adj}\}^{*} \\
&\quad \dots
\end{aligned}
$$

Grammaire syntagmatique [Cho56]

Exemple

français$\longrightarrow$français Ph

français$\longrightarrow$Ph

Ph$\longrightarrow$SN SV

Ph$\longrightarrow$SN SV SP

Ph$\longrightarrow \ldots$

SN$\longrightarrow$Det SA N SA

SV$\longrightarrow$V

SV$\longrightarrow$V SA

SV$\longrightarrow$V SN

SV$\longrightarrow \ldots$

SA$\longrightarrow$SA Adj

SA$\longrightarrow\varepsilon$

Forme de Backus-Naur (BNF) [Bac59]

Exemple

$$<francais> ::= <francais> <Ph>$$

$$<francais> ::= <Ph>$$

$$<Ph> ::= <SN> <SV>$$

$$<Ph> ::= <SN> <SV> <SP>$$

$$<Ph> ::= \ldots$$

$$<SN> ::= \text{Det } <SA> \text{ N } <SA>$$

$$<SV> ::= \text{V}$$

$$<SV> ::= \text{V } <SA>$$

$$<SV> ::= \text{V } <SN>$$

$$<SV> ::= \ldots$$

$$<SA> ::= <SA> \text{ Adj}$$

$$<SA> ::= \varepsilon$$

Systèmes de réécriture

Définition

$\langle V, P \rangle$ est un système de réécriture

- V est un vocabulaire et
- P un sous-ensemble de $V^* \times V^*$.

Systèmes de réécriture

Définition

$\langle V, P \rangle$ est un système de réécriture

- V est un vocabulaire et
- P un sous-ensemble de $V^* \times V^*$.

Systèmes de réécriture

Définition

$\langle V, P \rangle$ est un système de réécriture

- V est un vocabulaire et
- P un sous-ensemble de $V^* \times V^*$.

Systèmes de réécriture

Définition

$\langle V, P \rangle$ est un système de réécriture

- V est un vocabulaire et
- P un sous-ensemble de $V^* \times V^*$.

Les éléments $\alpha \rightarrow \beta$ de P sont appelés des règles de réécriture.

Dérivations

Définition

La relation de dérivation $\overset{r}{\Rightarrow}$ sur V^* est définie par

$$\varphi\alpha\sigma\overset{r}{\Rightarrow}\varphi\beta\sigma \text{ ssi } r = \alpha\rightarrow\beta \in P.$$

Dérivations

Définition

La relation de dérivation $\overset{r}{\Rightarrow}$ sur V^* est définie par

$$\varphi\alpha\sigma \overset{r}{\Rightarrow} \varphi\beta\sigma \text{ ssi } r = \alpha \rightarrow \beta \in P.$$

Dérivations

Définition

La relation de dérivation $\overset{r}{\Rightarrow}$ sur V^* est définie par

$$\varphi\alpha\sigma \overset{r}{\Rightarrow} \varphi\beta\sigma \text{ ssi } r = \alpha \rightarrow \beta \in P.$$

Dérivations

Définition

La relation de dérivation $\overset{r}{\Rightarrow}$ sur V^* est définie par

$$\varphi\alpha\sigma \overset{r}{\Rightarrow} \varphi\beta\sigma \text{ ssi } r = \alpha \rightarrow \beta \in P.$$

Cette relation est étendue aux séquences de règles dans le monoïde libre P^* par

$$\overset{\varepsilon}{\Rightarrow} = \mathrm{id}_{V^*}$$
$$\overset{r\pi}{\Rightarrow} = \overset{r}{\Rightarrow}\overset{\pi}{\Rightarrow}.$$

Dérivations

Définition

La relation de dérivation $\overset{r}{\Rightarrow}$ sur V^* est définie par

$$\varphi\alpha\sigma \overset{r}{\Rightarrow} \varphi\beta\sigma \text{ ssi } r = \alpha \rightarrow \beta \in P.$$

Cette relation est étendue aux séquences de règles dans le monoïde libre P^* par

$$\overset{\varepsilon}{\Rightarrow} = \mathrm{id}_{V^*}$$
$$\overset{r\pi}{\Rightarrow} = \overset{r}{\Rightarrow}\overset{\pi}{\Rightarrow}.$$

$$\Rightarrow = \bigcup_{r \in P} \overset{r}{\Rightarrow} \text{ et}$$
$$\Rightarrow^* = \bigcup_{\pi \in P^*} \overset{\pi}{\Rightarrow}.$$

Langage décrit par un système de réécriture

On distingue souvent une chaîne de caractères ρ de V^* ; on peut alors définir un langage par

- génération depuis l'axiome ρ comme

$$\mathcal{L}(\langle V, P\rangle) = \{\omega \mid \rho \Rightarrow^* \omega\},$$

- reconnaissance dans l'état d'acceptation ρ comme

$$\mathcal{L}(\langle V, P\rangle) = \{\omega \mid \omega \models^* \rho\}.$$

Deux systèmes $\langle V_1, P_1\rangle$ et $\langle V_2, P_2\rangle$ sont équivalents si $\mathcal{L}(\langle V_1, P_1\rangle) = \mathcal{L}(\langle V_2, P_2\rangle)$.

Langage décrit par un système de réécriture

On distingue souvent une chaîne de caractères ρ de V^* ; on peut alors définir un langage par

- génération depuis l'axiome ρ comme

$$\mathcal{L}(\langle V, P\rangle) = \{\omega \mid \rho \Rightarrow^* \omega\},$$

- reconnaissance dans l'état d'acceptation ρ comme

$$\mathcal{L}(\langle V, P\rangle) = \{\omega \mid \omega \models^* \rho\}.$$

Deux systèmes $\langle V_1, P_1\rangle$ et $\langle V_2, P_2\rangle$ sont équivalents si $\mathcal{L}(\langle V_1, P_1\rangle) = \mathcal{L}(\langle V_2, P_2\rangle)$.

Langage décrit par un système de réécriture

On distingue souvent une chaîne de caractères ρ de V^* ; on peut alors définir un langage par

- génération depuis l'axiome ρ comme

$$\mathcal{L}(\langle V, P\rangle) = \{\omega \mid \rho \Rightarrow^* \omega\},$$

- reconnaissance dans l'état d'acceptation ρ comme

$$\mathcal{L}(\langle V, P\rangle) = \{\omega \mid \omega \models^* \rho\}.$$

(Dans ce dernier cas, on substitue les notations $\vdash$ et $\models$ à $\rightarrow$ et $\Rightarrow$.)
Deux systèmes $\langle V_1, P_1\rangle$ et $\langle V_2, P_2\rangle$ sont équivalents si $\mathcal{L}(\langle V_1, P_1\rangle) = \mathcal{L}(\langle V_2, P_2\rangle)$.

Langage décrit par un système de réécriture

On distingue souvent une chaîne de caractères ρ de V^* ; on peut alors définir un langage par

- génération depuis l'axiome ρ comme

$$\mathcal{L}(\langle V, P\rangle) = \{\omega \mid \rho \Rightarrow^* \omega\},$$

- reconnaissance dans l'état d'acceptation ρ comme

$$\mathcal{L}(\langle V, P\rangle) = \{\omega \mid \omega \models^* \rho\}.$$

Deux systèmes $\langle V_1, P_1\rangle$ et $\langle V_2, P_2\rangle$ sont équivalents si $\mathcal{L}(\langle V_1, P_1\rangle) = \mathcal{L}(\langle V_2, P_2\rangle)$.

Grammaires syntagmatiques [Cho59]

Définition

Un quadruplet $\langle \Sigma, N, S, P \rangle$ est une grammaire syntagmatique $\mathcal{G}$ (en anglais *phrase structure grammar*) :

- Σ est l'alphabet terminal,
- N est l'alphabet non terminal,
- $S \in N$ est l'axiome,
- P est un ensemble de règles de la forme $\varphi A \sigma \rightarrow \varphi \alpha \sigma$ où $A \in N$.

Grammaires syntagmatiques [Cho59]

Définition

Un quadruplet $\langle \Sigma, N, S, P \rangle$ est une grammaire syntagmatique $\mathcal{G}$ (en anglais *phrase structure grammar*) :

- Σ est l'alphabet terminal,
- N est l'alphabet non terminal,
- $S \in N$ est l'axiome,
- P est un ensemble de règles de la forme $\varphi A \sigma \rightarrow \varphi \alpha \sigma$ où $A \in N$.

Grammaires syntagmatiques [Cho59]

Définition

Un quadruplet $\langle \Sigma, N, S, P \rangle$ est une grammaire syntagmatique $\mathcal{G}$ (en anglais *phrase structure grammar*) :

- Σ est l'alphabet terminal,
- N est l'alphabet non terminal,
- $S \in N$ est l'axiome,
- P est un ensemble de règles de la forme $\varphi A \sigma \rightarrow \varphi \alpha \sigma$ où $A \in N$.

Grammaires syntagmatiques [Cho59]

Définition

Un quadruplet $\langle \Sigma, N, S, P \rangle$ est une grammaire syntagmatique $\mathcal{G}$ (en anglais *phrase structure grammar*) :

- Σ est l'alphabet terminal,
- N est l'alphabet non terminal,
- $S \in N$ est l'axiome,
- P est un ensemble de règles de la forme $\varphi A \sigma \rightarrow \varphi \alpha \sigma$ où $A \in N$.

Grammaires syntagmatiques [Cho59]

Définition

Un quadruplet $\langle \Sigma, N, S, P \rangle$ est une grammaire syntagmatique $\mathcal{G}$ (en anglais *phrase structure grammar*) :

- Σ est l'alphabet terminal,
- N est l'alphabet non terminal,
- $S \in N$ est l'axiome,
- P est un ensemble de règles de la forme $\varphi A \sigma \rightarrow \varphi \alpha \sigma$ où $A \in N$.

Grammaires syntagmatiques [Cho59]

Définition

Un quadruplet $\langle \Sigma, N, S, P \rangle$ est une grammaire syntagmatique $\mathcal{G}$ (en anglais *phrase structure grammar*) :

- Σ est l'alphabet terminal,
- N est l'alphabet non terminal,
- $S \in N$ est l'axiome,
- P est un ensemble de règles de la forme $\varphi A \sigma \rightarrow \varphi \alpha \sigma$ où $A \in N$.

Soit $V = \Sigma \cup N$ le vocabulaire, $\langle V, P \rangle$ est bien un système de réécriture génératif.

Conventions de notation

- $a, b, c, d, \ldots$ sont des éléments de Σ ;
- $A, B, C, D, \ldots$ sont des éléments de N ;
- X, Y, Z sont des éléments de V ;
- u, v, w, x, y, z sont des éléments de Σ^* ;
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ sont des éléments de V^*.

Conventions de notation

- $a, b, c, d, \ldots$ sont des éléments de Σ ;
- $A, B, C, D, \ldots$ sont des éléments de N ;
- X, Y, Z sont des éléments de V ;
- u, v, w, x, y, z sont des éléments de Σ^* ;
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ sont des éléments de V^*.

Conventions de notation

- $a, b, c, d, \ldots$ sont des éléments de Σ ;
- $A, B, C, D, \ldots$ sont des éléments de N ;
- X, Y, Z sont des éléments de V ;
- u, v, w, x, y, z sont des éléments de Σ^* ;
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ sont des éléments de V^*.

Conventions de notation

- $a, b, c, d, \ldots$ sont des éléments de Σ ;
- $A, B, C, D, \ldots$ sont des éléments de N ;
- X, Y, Z sont des éléments de V ;
- u, v, w, x, y, z sont des éléments de Σ^* ;
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ sont des éléments de V^*.

Conventions de notation

- $a, b, c, d, \ldots$ sont des éléments de Σ ;
- $A, B, C, D, \ldots$ sont des éléments de N ;
- X, Y, Z sont des éléments de V ;
- u, v, w, x, y, z sont des éléments de Σ^* ;
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ sont des éléments de V^*.

Conventions de notation

- $a, b, c, d, \ldots$ sont des éléments de Σ ;
- $A, B, C, D, \ldots$ sont des éléments de N ;
- X, Y, Z sont des éléments de V ;
- u, v, w, x, y, z sont des éléments de Σ^* ;
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ sont des éléments de V^*.

Hiérarchie de Chomsky [Cho59]

Restrictions sur la forme des règles de P :

0. $\alpha \longrightarrow \beta$ avec α dans V^+ et β dans V^* : grammaires contextuelles avec effacement ;
1. $\varphi A \sigma \longrightarrow \varphi \alpha \sigma$ avec φ et σ dans V^*, A dans N et α dans V^+ : grammaires contextuelles ou monotones ;
2. $A \longrightarrow \alpha$ avec A dans N et α dans V^* : grammaires non contextuelles ou algébriques ;
3. $A \longrightarrow \alpha$ avec A dans N et α dans Σ^* ou dans $\Sigma^* \cdot N$: grammaires linéaires à droite.

Hiérarchie de Chomsky [Cho59]

Restrictions sur la forme des règles de P :

0. $\alpha \longrightarrow \beta$ avec α dans V^+ et β dans V^* : grammaires contextuelles avec effacement ;
1. $\varphi A \sigma \longrightarrow \varphi \alpha \sigma$ avec φ et σ dans V^*, A dans N et α dans V^+ : grammaires contextuelles ou monotones ;
2. $A \longrightarrow \alpha$ avec A dans N et α dans V^* : grammaires non contextuelles ou algébriques ;
3. $A \longrightarrow \alpha$ avec A dans N et α dans Σ^* ou dans $\Sigma^* \cdot N$: grammaires linéaires à droite.

Hiérarchie de Chomsky [Cho59]

Restrictions sur la forme des règles de P :

0. $\alpha \rightarrow \beta$ avec α dans V^+ et β dans V^* : grammaires contextuelles avec effacement ;
1. $\varphi A \sigma \rightarrow \varphi \alpha \sigma$ avec φ et σ dans V^*, A dans N et α dans V^+ : grammaires contextuelles ou monotones ;
2. $A \rightarrow \alpha$ avec A dans N et α dans V^* : grammaires non contextuelles ou algébriques ;
3. $A \rightarrow \alpha$ avec A dans N et α dans Σ^* ou dans $\Sigma^* \cdot N$: grammaires linéaires à droite.

Hiérarchie de Chomsky [Cho59]

Restrictions sur la forme des règles de P :

0. $\alpha \rightarrow \beta$ avec α dans V^+ et β dans V^* : grammaires contextuelles avec effacement ;
1. $\varphi A \sigma \rightarrow \varphi \alpha \sigma$ avec φ et σ dans V^*, A dans N et α dans V^+ : grammaires contextuelles ou monotones ;
2. $A \rightarrow \alpha$ avec A dans N et α dans V^* : grammaires non contextuelles ou algébriques ;
3. $A \rightarrow \alpha$ avec A dans N et α dans Σ^* ou dans $\Sigma^* \cdot N$: grammaires linéaires à droite.

Hiérarchie de Chomsky [Cho59]

Restrictions sur la forme des règles de P :

0. $\alpha \rightarrow \beta$ avec α dans V^+ et β dans V^* : grammaires contextuelles avec effacement ;
1. $\varphi A \sigma \rightarrow \varphi \alpha \sigma$ avec φ et σ dans V^*, A dans N et α dans V^+ : grammaires contextuelles ou monotones ;
2. $A \rightarrow \alpha$ avec A dans N et α dans V^* : grammaires non contextuelles ou algébriques ;
3. $A \rightarrow \alpha$ avec A dans N et α dans Σ^* ou dans $\Sigma^* \cdot N$: grammaires linéaires à droite.

Machines et automates

La hiérarchie de Chomsky trouve un écho dans les systèmes de réécriture recognitifs :

0. Langages récursivement énumérables, reconnaissables par une Machine de Turing (TM) ;
1. Langages contextuels, reconnaissables par une Machine de Turing dont le ruban a une longueur linéaire de la taille des données traitées (LBTM) ;
2. Langages non contextuels ou algébriques, reconnaissables par un automate à pile (*Push-Down Automaton*, PDA) ;
3. Langages rationnels, reconnaissables par un automate d'états finis (*Finite-State Automaton*, FSA).

Machines et automates

La hiérarchie de Chomsky trouve un écho dans les systèmes de réécriture recognitifs :

0. Langages récursivement énumérables, reconnaissables par une Machine de Turing (TM) ;
1. Langages contextuels, reconnaissables par une Machine de Turing dont le ruban a une longueur linéaire de la taille des données traitées (LBTM) ;
2. Langages non contextuels ou algébriques, reconnaissables par un automate à pile (*Push-Down Automaton*, PDA) ;
3. Langages rationnels, reconnaissables par un automate d'états finis (*Finite-State Automaton*, FSA).

Machines et automates

La hiérarchie de Chomsky trouve un écho dans les systèmes de réécriture recognitifs :

0. Langages récursivement énumérables, reconnaissables par une Machine de Turing (TM) ;
1. Langages contextuels, reconnaissables par une Machine de Turing dont le ruban a une longueur linéaire de la taille des données traitées (LBTM) ;
2. Langages non contextuels ou algébriques, reconnaissables par un automate à pile (*Push-Down Automaton*, PDA) ;
3. Langages rationnels, reconnaissables par un automate d'états finis (*Finite-State Automaton*, FSA).

Machines et automates

La hiérarchie de Chomsky trouve un écho dans les systèmes de réécriture recognitifs :

0. Langages récursivement énumérables, reconnaissables par une Machine de Turing (TM) ;
1. Langages contextuels, reconnaissables par une Machine de Turing dont le ruban a une longueur linéaire de la taille des données traitées (LBTM) ;
2. Langages non contextuels ou algébriques, reconnaissables par un automate à pile (*Push-Down Automaton*, PDA) ;
3. Langages rationnels, reconnaissables par un automate d'états finis (*Finite-State Automaton*, FSA).

Machines et automates

La hiérarchie de Chomsky trouve un écho dans les systèmes de réécriture recognitifs :

0. Langages récursivement énumérables, reconnaissables par une Machine de Turing (TM) ;
1. Langages contextuels, reconnaissables par une Machine de Turing dont le ruban a une longueur linéaire de la taille des données traitées (LBTM) ;
2. Langages non contextuels ou algébriques, reconnaissables par un automate à pile (*Push-Down Automaton*, PDA) ;
3. Langages rationnels, reconnaissables par un automate d'états finis (*Finite-State Automaton*, FSA).

Langages algébriques

L'ensemble des langages algébriques est fermé par

- union
- concaténation

Langages algébriques

L'ensemble des langages algébriques est fermé par

- union
- concaténation

Langages algébriques

L'ensemble des langages algébriques est fermé par

- union
- concaténation

Langages algébriques

L'ensemble des langages algébriques est fermé par

- union
- concaténation
- intersection avec un langage rationnel

Langages algébriques

L'ensemble des langages algébriques est fermé par

- union
- concaténation

- homomorphisme

Langages algébriques

L'ensemble des langages algébriques est fermé par

- union
- concaténation

- ...

Dérivations droites et gauches

Définition

Une dérivation droite $\underset{\text{rm}}{\Rightarrow}$ est définie par

$$\varphi A x \underset{\text{rm}}{\Rightarrow} \varphi \alpha x \text{ ssi } A \rightarrow \alpha \in P$$

Définition

Une dérivation gauche $\underset{\text{lm}}{\Rightarrow}$ est définie par

$$y A \sigma \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} y \alpha \sigma \text{ ssi } A \rightarrow \alpha \in P$$

Dérivations droites et gauches

Définition

Une dérivation droite $\underset{\text{rm}}{\Rightarrow}$ est définie par

$$\varphi Ax \underset{\text{rm}}{\Rightarrow} \varphi\alpha x \text{ ssi } A \to \alpha \in P$$

Définition

Une dérivation gauche $\underset{\text{lm}}{\Rightarrow}$ est définie par

$$yA\sigma \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} y\alpha\sigma \text{ ssi } A \to \alpha \in P$$

Dérivations droites et gauches

Définition

Une dérivation droite $\underset{\text{rm}}{\Rightarrow}$ est définie par

$$\varphi A x \underset{\text{rm}}{\Rightarrow} \varphi \alpha x \text{ ssi } A \rightarrow \alpha \in P$$

Définition

Une dérivation gauche $\underset{\text{lm}}{\Rightarrow}$ est définie par

$$y A \sigma \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} y \alpha \sigma \text{ ssi } A \rightarrow \alpha \in P$$

Dérivations droites et gauches

Définition

Une dérivation droite $\underset{\text{rm}}{\Rightarrow}$ est définie par

$$\varphi A x \underset{\text{rm}}{\Rightarrow} \varphi \alpha x \text{ ssi } A \rightarrow \alpha \in P$$

Définition

Une dérivation gauche $\underset{\text{lm}}{\Rightarrow}$ est définie par

$$y A \sigma \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} y \alpha \sigma \text{ ssi } A \rightarrow \alpha \in P$$

Dérivations droites et gauches

Définition

Une dérivation droite $\underset{\text{rm}}{\Rightarrow}$ est définie par

$$\varphi A x \underset{\text{rm}}{\Rightarrow} \varphi \alpha x \text{ ssi } A \rightarrow \alpha \in P$$

Définition

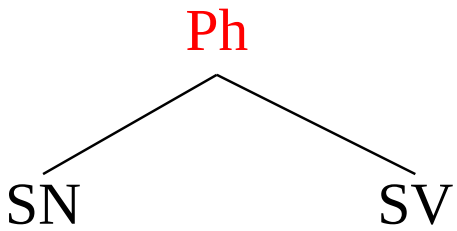
Une dérivation gauche $\underset{\text{lm}}{\Rightarrow}$ est définie par

$$y A \sigma \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} y \alpha \sigma \text{ ssi } A \rightarrow \alpha \in P$$

Parcours d'un arbre syntaxique

Exemple

Lors d'une dérivation droite :

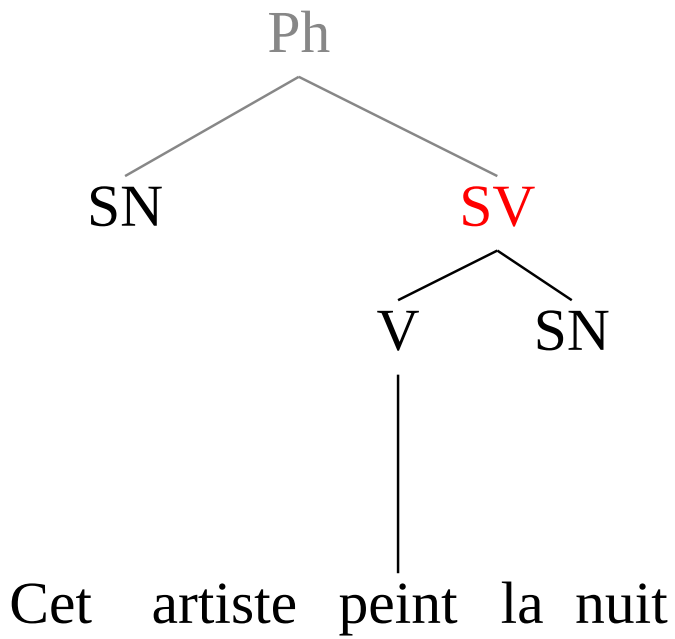


Cet artiste peint la nuit

Parcours d'un arbre syntaxique

Exemple

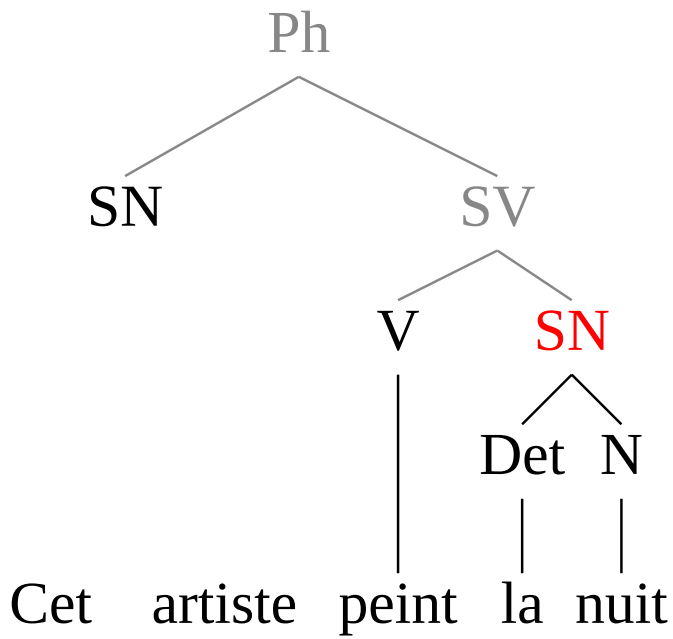
Lors d'une dérivation droite :



Parcours d'un arbre syntaxique

Exemple

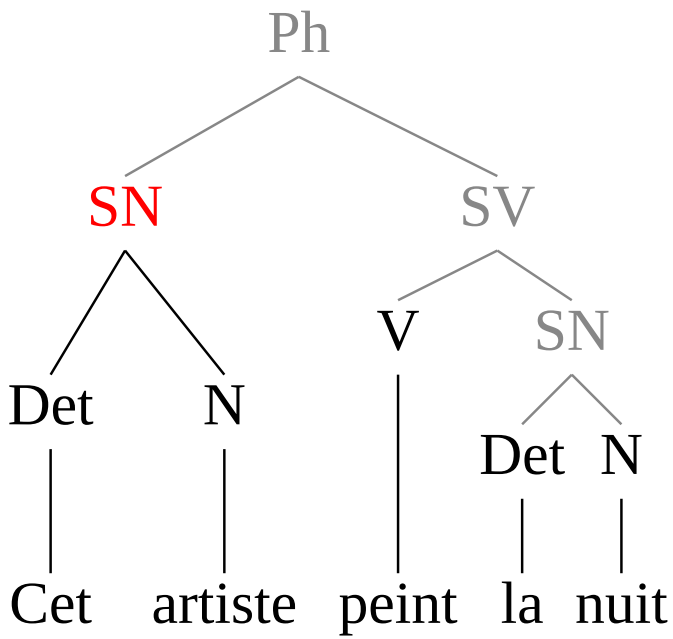
Lors d'une dérivation droite :



Parcours d'un arbre syntaxique

Exemple

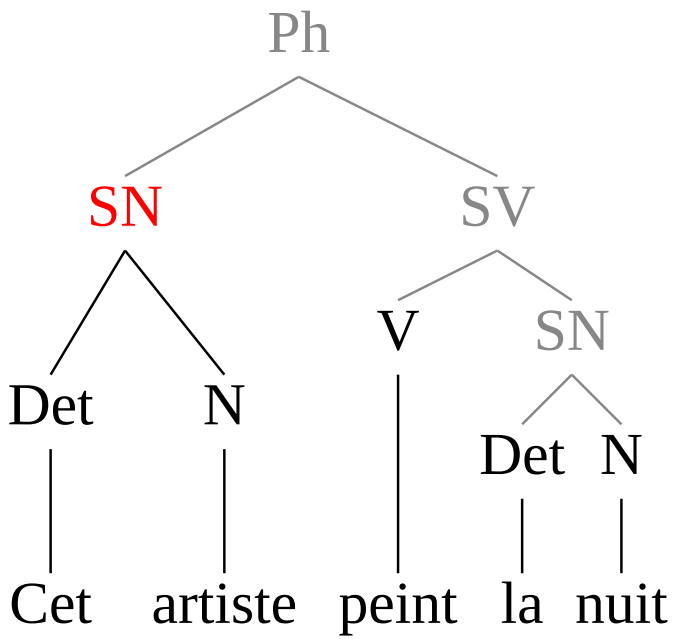
Lors d'une dérivation droite :



Parcours d'un arbre syntaxique

Exemple

Lors d'une dérivation droite :



Une seule dérivation droite (ou gauche) par arbre de dérivation.

Ambiguïté

L'existence de deux arbres syntaxiques différents marque une ambiguïté.

Théorème

Soit $\mathcal{G}$ une grammaire algébrique ; elle est ambiguë si et seulement si une phrase de $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ possède plus d'une dérivation droite (ou gauche).

Il existe des langages algébriques intrinsèquement ambigus.

Exemple ([Par66])

Le langage $\{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ ou } j = k\}$ est intrinsèquement ambigu.

Théorème ([Can62, CS63])

Le problème de l'ambiguïté d'une grammaire algébrique n'est pas décidable.

Automate à pile

Définition

Un automate à pile $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, R, \varphi_s, F, \$, \| \rangle$ est un système de réécriture $\langle Q \cup \Sigma \cup \{\$, \|\}, R \rangle$ recognitif où

- Q est l'alphabet de pile,
- Σ est l'alphabet d'entrée,
- $R \subseteq \{\$\} \cdot Q^* \cdot \{\|\} \cdot \Sigma^* \cdot \{\$\}$ est un ensemble de règles

$$\varphi \| xy \vdash \psi \| y,$$

- $\varphi_s \in Q^*$ est le contenu initial de la pile,
- $F \subseteq Q^*$ est l'ensemble des contenus finaux de la pile,
- $\$$ est le marqueur de fin, et
- $\|$ est le délimiteur de sommet de pile.

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \{w \mid \$\varphi_s \| w\$ \models^* \$\varphi_f \|\$ \text{ avec } \varphi_f \in F\}.$$

Automate à pile

Définition

Un automate à pile $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, R, \varphi_s, F, \$, \| \rangle$ est un système de réécriture $\langle Q \cup \Sigma \cup \{\$, \|\}, R \rangle$ recognitif où

- Q est l'alphabet de pile,
- Σ est l'alphabet d'entrée,
- $R \subseteq \{\$\} \cdot Q^* \cdot \{\|\} \cdot \Sigma^* \cdot \{\$\}$ est un ensemble de règles

$$\varphi \| xy \vdash \psi \| y,$$

- $\varphi_s \in Q^*$ est le contenu initial de la pile,
- $F \subseteq Q^*$ est l'ensemble des contenus finaux de la pile,
- $\$$ est le marqueur de fin, et
- $\|$ est le délimiteur de sommet de pile.

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \{w \mid \$\varphi_s \| w\$ \models^* \$\varphi_f \|\$ \text{ avec } \varphi_f \in F\}.$$

Automate à pile

Définition

Un automate à pile $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, R, \varphi_s, F, \$, \| \rangle$ est un système de réécriture $\langle Q \cup \Sigma \cup \{\$, \|\}, R \rangle$ recognitif où

- Q est l'alphabet de pile,
- Σ est l'alphabet d'entrée,
- $R \subseteq \{\$\} \cdot Q^* \cdot \{\|\} \cdot \Sigma^* \cdot \{\$\}$ est un ensemble de règles

$$\varphi \| xy \vdash \psi \| y,$$

- $\varphi_s \in Q^*$ est le contenu initial de la pile,
- $F \subseteq Q^*$ est l'ensemble des contenus finaux de la pile,
- $\$$ est le marqueur de fin, et
- $\|$ est le délimiteur de sommet de pile.

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \{w \mid \$\varphi_s \| w\$ \models^* \$\varphi_f \|\$ \text{ avec } \varphi_f \in F\}.$$

Automate à pile

Définition

Un automate à pile $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, R, \varphi_s, F, \$, \| \rangle$ est un système de réécriture $\langle Q \cup \Sigma \cup \{\$, \|\}, R \rangle$ recognitif où

- Q est l'alphabet de pile,
- Σ est l'alphabet d'entrée,
- $R \subseteq \{\$\} \cdot Q^* \cdot \{\|\} \cdot \Sigma^* \cdot \{\$\}$ est un ensemble de règles

$$\varphi \| xy \vdash \psi \| y,$$

- $\varphi_s \in Q^*$ est le contenu initial de la pile,
- $F \subseteq Q^*$ est l'ensemble des contenus finaux de la pile,
- $\$$ est le marqueur de fin, et
- $\|$ est le délimiteur de sommet de pile.

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \{w \mid \$\varphi_s \| w\$ \models^* \$\varphi_f \|\$ \text{ avec } \varphi_f \in F\}.$$

Automate à pile

Définition

Un automate à pile $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, R, \varphi_s, F, \$, \| \rangle$ est un système de réécriture $\langle Q \cup \Sigma \cup \{\$, \|\}, R \rangle$ recognitif où

- Q est l'alphabet de pile,
- Σ est l'alphabet d'entrée,
- $R \subseteq \{\$\} \cdot Q^* \cdot \{\|\} \cdot \Sigma^* \cdot \{\$\}$ est un ensemble de règles

$$\varphi \| xy \vdash \psi \| y,$$

- $\varphi_s \in Q^*$ est le contenu initial de la pile,
- $F \subseteq Q^*$ est l'ensemble des contenus finaux de la pile,
- $\$$ est le marqueur de fin, et
- $\|$ est le délimiteur de sommet de pile.

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \{w \mid \$\varphi_s \| w\$ \models^* \$\varphi_f \|\$ \text{ avec } \varphi_f \in F\}.$$

Automate à pile

Définition

Un automate à pile $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, R, \varphi_s, F, \$, \| \rangle$ est un système de réécriture $\langle Q \cup \Sigma \cup \{\$, \|\}, R \rangle$ recognitif où

- Q est l'alphabet de pile,
- Σ est l'alphabet d'entrée,
- $R \subseteq \{\$\} \cdot Q^* \cdot \{\|\} \cdot \Sigma^* \cdot \{\$\}$ est un ensemble de règles

$$\varphi \| xy \vdash \psi \| y,$$

- $\varphi_s \in Q^*$ est le contenu initial de la pile,
- $F \subseteq Q^*$ est l'ensemble des contenus finaux de la pile,
- \$ est le marqueur de fin, et
- $\|$ est le délimiteur de sommet de pile.

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \{w \mid \$\varphi_s \| w\$ \models^* \$\varphi_f \|\$ \text{ avec } \varphi_f \in F\}.$$

Automate à pile

Définition

Un automate à pile $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, R, \varphi_s, F, \$, \| \rangle$ est un système de réécriture $\langle Q \cup \Sigma \cup \{\$, \|\}, R \rangle$ recognitif où

- Q est l'alphabet de pile,
- Σ est l'alphabet d'entrée,
- $R \subseteq \{\$\} \cdot Q^* \cdot \{\|\} \cdot \Sigma^* \cdot \{\$\}$ est un ensemble de règles

$$\varphi \| xy \vdash \psi \| y,$$

- $\varphi_s \in Q^*$ est le contenu initial de la pile,
- $F \subseteq Q^*$ est l'ensemble des contenus finaux de la pile,
- $\$$ est le marqueur de fin, et
- $\|$ est le délimiteur de sommet de pile.

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \{w \mid \$\varphi_s \| w\$ \models^* \$\varphi_f \|\$ \text{ avec } \varphi_f \in F\}.$$

Automate à pile

Définition

Un automate à pile $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, R, \varphi_s, F, \$, \| \rangle$ est un système de réécriture $\langle Q \cup \Sigma \cup \{\$, \|\}, R \rangle$ recognitif où

- Q est l'alphabet de pile,
- Σ est l'alphabet d'entrée,
- $R \subseteq \{\$\} \cdot Q^* \cdot \{\|\} \cdot \Sigma^* \cdot \{\$\}$ est un ensemble de règles

$$\varphi \| xy \vdash \psi \| y,$$

- $\varphi_s \in Q^*$ est le contenu initial de la pile,
- $F \subseteq Q^*$ est l'ensemble des contenus finaux de la pile,
- $\$$ est le marqueur de fin, et
- $\|$ est le délimiteur de sommet de pile.

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \{w \mid \$\varphi_s \| w\$ \models^* \$\varphi_f \|\$ \text{ avec } \varphi_f \in F\}.$$

Analyseur descendant

Définition

L'analyseur récursif descendant pour une grammaire algébrique $\mathcal{G} = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ est un automate à pile $\mathcal{A}_{\text{desc}} = \langle Q, \Sigma, R, \varphi_s, F, \$, \| \rangle$ où

- Q est l'ensemble des production pointées de P', notées
$$[A \to \alpha \bullet \alpha'] \text{ si } A \to \alpha\alpha' \in P',$$
- R est l'ensemble des règles
$$[A \to \alpha \bullet B\alpha'] \| \vdash_{\text{predict}} [A \to \alpha B \bullet \alpha'][B \to \bullet \beta] \|,$$
$$[A \to \alpha \bullet a\alpha'] \| a \vdash_{\text{match}} [A \to \alpha a \bullet \alpha'] \|,$$
$$[A \to \alpha \bullet] \| \vdash \|,$$
- $\varphi_s = [S' \to \bullet S\$]$,
- $F = \{[S' \to S \bullet \$]\}$.

Analyseur descendant

Définition

L'analyseur récursif descendant pour une grammaire algébrique $\mathcal{G} = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ est un automate à pile $\mathcal{A}_{\text{desc}} = \langle Q, \Sigma, R, \varphi_s, F, \$, \| \rangle$ où

- Q est l'ensemble des production pointées de P', notées
$$[A \to \alpha \bullet \alpha'] \text{ si } A \to \alpha\alpha' \in P',$$
- R est l'ensemble des règles
$$[A \to \alpha \bullet B\alpha'] \| \vdash_{\text{predict}} [A \to \alpha B \bullet \alpha'][B \to \bullet \beta] \|,$$
$$[A \to \alpha \bullet a\alpha'] \| a \vdash_{\text{match}} [A \to \alpha a \bullet \alpha'] \|,$$
$$[A \to \alpha \bullet] \| \vdash \|,$$
- $\varphi_s = [S' \to \bullet S\$]$,
- $F = \{[S' \to S \bullet \$]\}$.

Analyseur descendant

Définition

L'analyseur récursif descendant pour une grammaire algébrique $\mathcal{G} = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ est un automate à pile $\mathcal{A}_{\text{desc}} = \langle Q, \Sigma, R, \varphi_s, F, \$, \| \rangle$ où

- Q est l'ensemble des production pointées de P', notées
$$[A \to \alpha \bullet \alpha'] \text{ si } A \to \alpha\alpha' \in P',$$
- R est l'ensemble des règles
$$[A \to \alpha \bullet B\alpha'] \| \vdash_{\text{predict}} [A \to \alpha B \bullet \alpha'][B \to \bullet \beta] \|,$$
$$[A \to \alpha \bullet a\alpha'] \| a \vdash_{\text{match}} [A \to \alpha a \bullet \alpha'] \|,$$
$$[A \to \alpha \bullet] \| \vdash \|,$$
- $\varphi_s = [S' \to \bullet S\$]$,
- $F = \{[S' \to S \bullet \$]\}$.

Analyseur descendant

Définition

L'analyseur récursif descendant pour une grammaire algébrique $\mathcal{G} = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ est un automate à pile $\mathcal{A}_{\text{desc}} = \langle Q, \Sigma, R, \varphi_s, F, \$, \| \rangle$ où

- Q est l'ensemble des production pointées de P', notées
$$[A \to \alpha \bullet \alpha'] \text{ si } A \to \alpha\alpha' \in P',$$
- R est l'ensemble des règles
$$[A \to \alpha \bullet B\alpha'] \| \vdash_{\text{predict}} [A \to \alpha B \bullet \alpha'][B \to \bullet \beta] \|,$$
$$[A \to \alpha \bullet a\alpha'] \| a \vdash_{\text{match}} [A \to \alpha a \bullet \alpha'] \|,$$
$$[A \to \alpha \bullet] \| \vdash \|,$$
- $\varphi_s = [S' \to \bullet S\$]$,
- $F = \{[S' \to S \bullet \$]\}$.

Analyseur descendant

Définition

L'analyseur récursif descendant pour une grammaire algébrique $\mathcal{G} = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ est un automate à pile $\mathcal{A}_{\text{desc}} = \langle Q, \Sigma, R, \varphi_s, F, \$, \| \rangle$ où

- Q est l'ensemble des production pointées de P', notées
$$[A \to \alpha \bullet \alpha'] \text{ si } A \to \alpha\alpha' \in P',$$
- R est l'ensemble des règles
$$[A \to \alpha \bullet B\alpha'] \| \vdash_{\text{predict}} [A \to \alpha B \bullet \alpha'][B \to \bullet \beta] \|,$$
$$[A \to \alpha \bullet a\alpha'] \| a \vdash_{\text{match}} [A \to \alpha a \bullet \alpha'] \|,$$
$$[A \to \alpha \bullet] \| \vdash \|,$$
- $\varphi_s = [S' \to \bullet S\$]$,
- $F = \{[S' \to S \bullet \$]\}$.

Analyse descendante

Exemple

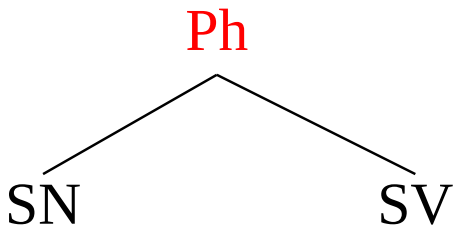
Ph

Cet artiste peint la nuit

$[S' \rightarrow \bullet \text{Ph } \$] || \text{Det N V Det N} \$$

Analyse descendante

Exemple

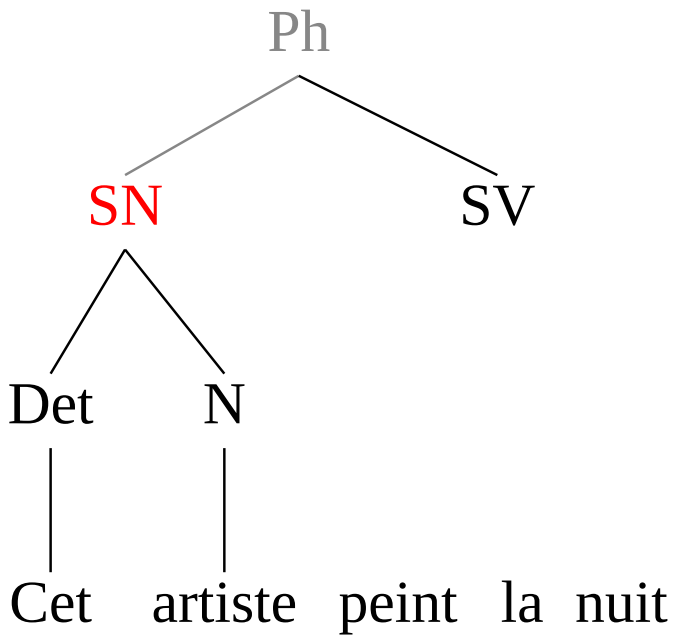


Cet artiste peint la nuit

$$\models_{\text{predict}} \$[S' \rightarrow \text{Ph} \bullet \$][\text{Ph} \rightarrow \bullet \text{SN SV}] \| \text{Det N V Det N\$}$$

Analyse descendante

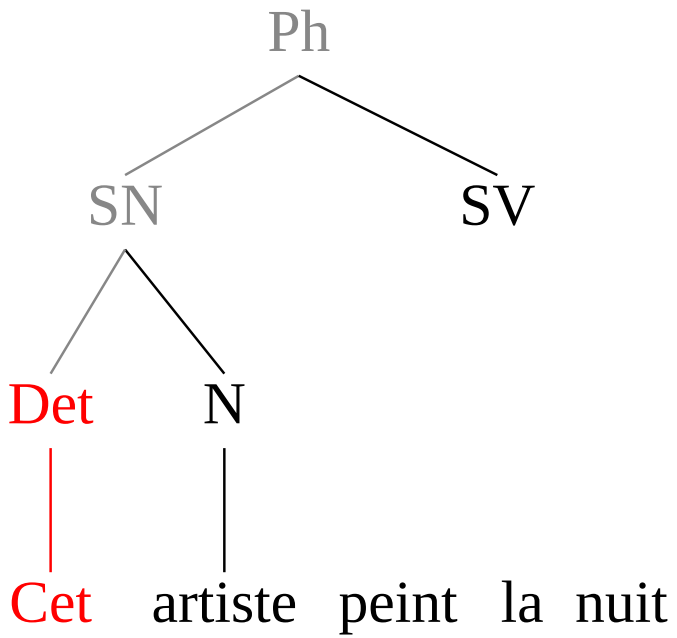
Exemple



$$\models_{\text{predict}} \$[S' \rightarrow \text{Ph} \bullet \$][\text{Ph} \rightarrow \text{SN} \bullet \text{SV}][\text{SN} \rightarrow \bullet \text{Det N}] \| \text{Det N V Det N\$}$$

Analyse descendante

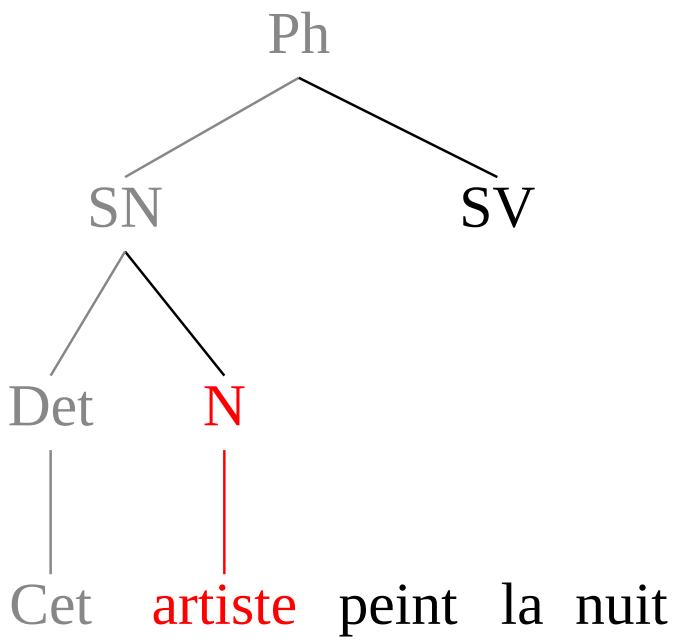
Exemple



$$\models_{\text{match}} \$[S' \to \text{Ph} \bullet \$][\text{Ph} \to \text{SN} \bullet \text{SV}][\text{SN} \to \text{Det} \bullet \text{N}] \| \text{N V Det N\$}$$

Analyse descendante

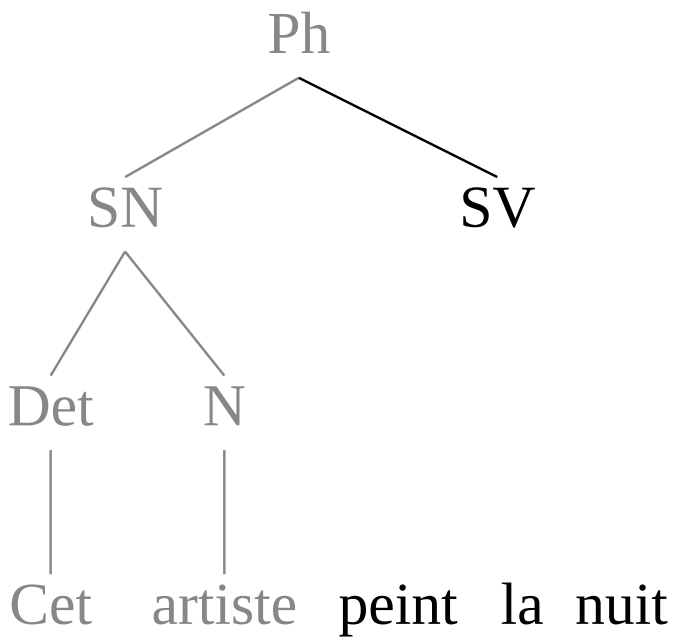
Exemple



$$\models_{\text{match}} \$[S' \rightarrow \text{Ph} \bullet \$][\text{Ph} \rightarrow \text{SN} \bullet \text{SV}][\text{SN} \rightarrow \text{Det N} \bullet] \| \text{V Det N\$}$$

Analyse descendante

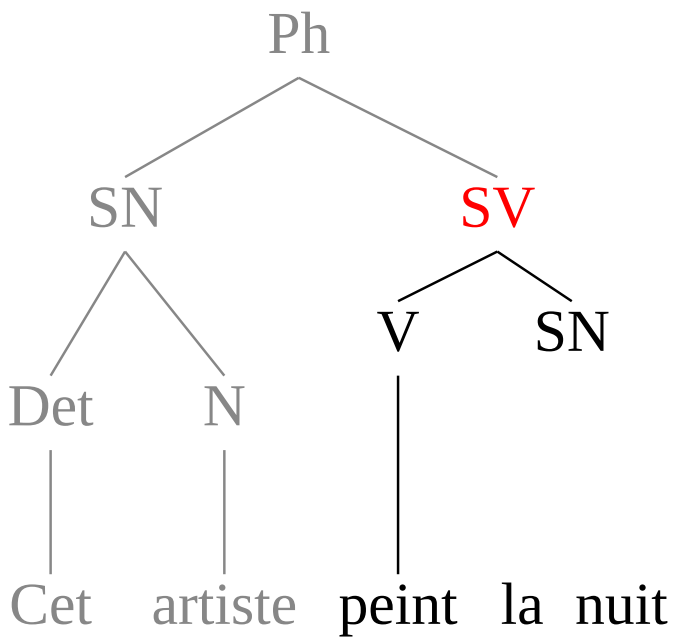
Exemple



$$\models \$[S' \rightarrow \mathrm{Ph} \bullet \$][\mathrm{Ph} \rightarrow \mathrm{SN} \bullet \mathrm{SV}] \| \mathrm{V\ Det\ N\$}$$

Analyse descendante

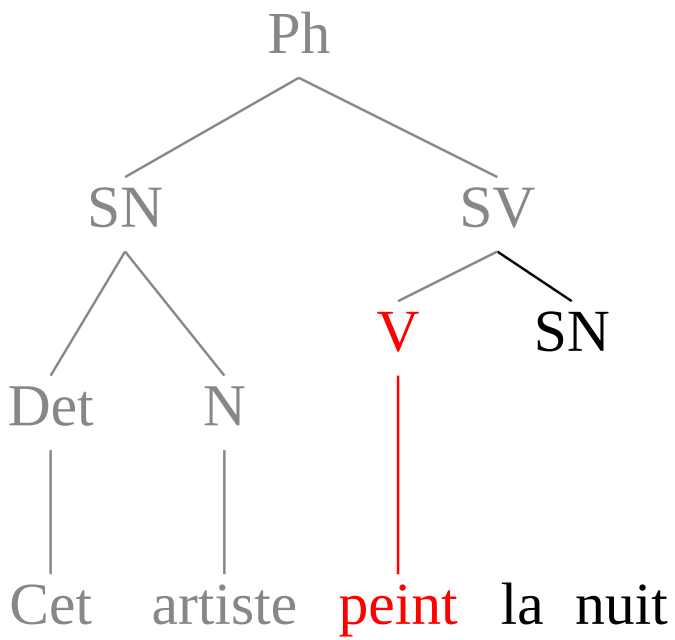
Exemple



$$\models_{\text{predict}} \$[S' \rightarrow \text{Ph} \bullet \$][\text{Ph} \rightarrow \text{SN SV} \bullet][\text{SV} \rightarrow \bullet \text{V SN}] \| \text{V Det N\$}$$

Analyse descendante

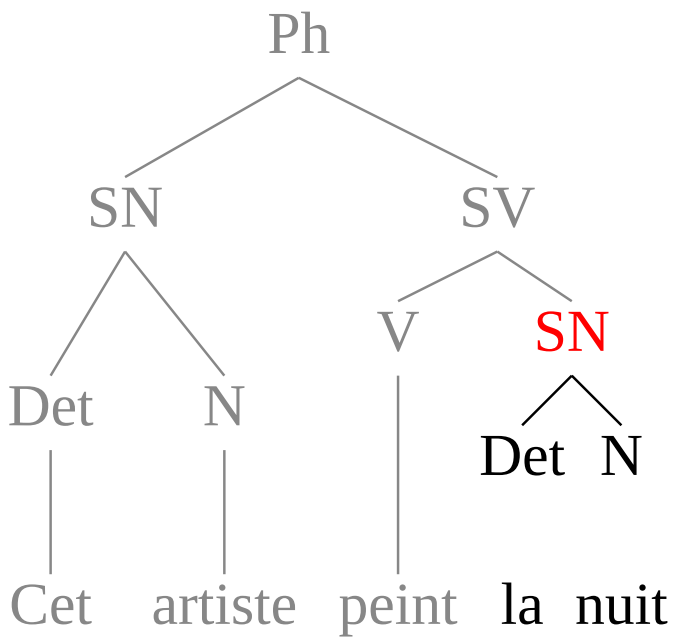
Exemple



$$\models_{\text{match}} \$[S' \rightarrow \text{Ph} \bullet \$][\text{Ph} \rightarrow \text{SN SV} \bullet][\text{SV} \rightarrow \text{V} \bullet \text{SN}] \| \text{Det N\$}$$

Analyse descendante

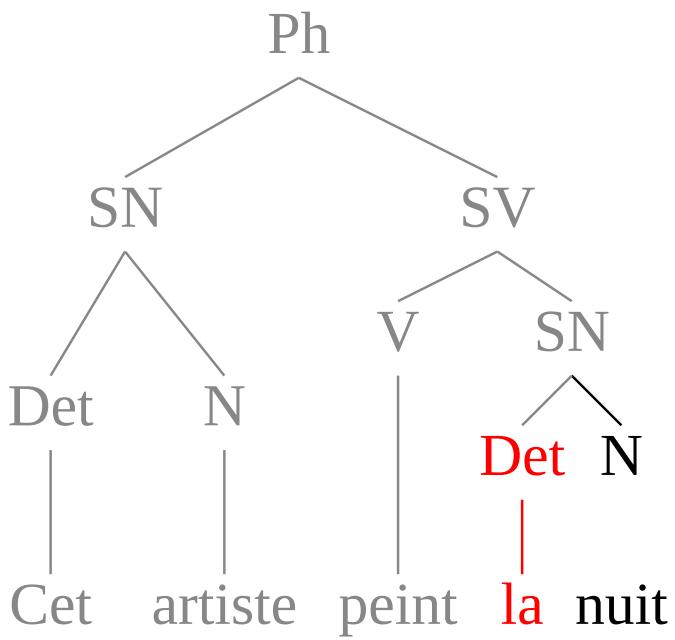
Exemple



$$\models_{\text{predict}} \$[S' \rightarrow \text{Ph} \bullet \$][\text{Ph} \rightarrow \text{SN SV} \bullet][\text{SV} \rightarrow \text{V SN} \bullet][\text{SN} \rightarrow \bullet \text{Det N}] \| \text{Det N}\$$$

Analyse descendante

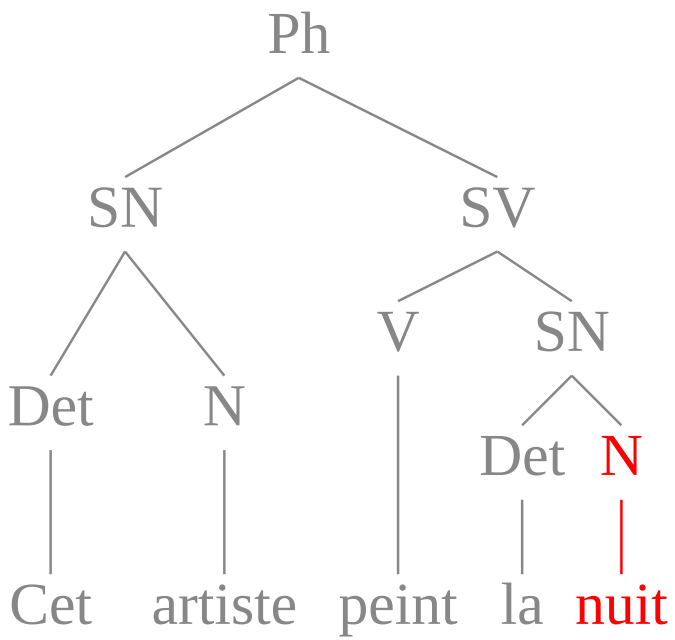
Exemple



$$\models_{\text{match}} \$[S' \to \text{Ph} \bullet \$][\text{Ph} \to \text{SN SV} \bullet][\text{SV} \to \text{V SN} \bullet][\text{SN} \to \text{Det} \bullet \text{N}] \| \text{N}\$$$

Analyse descendante

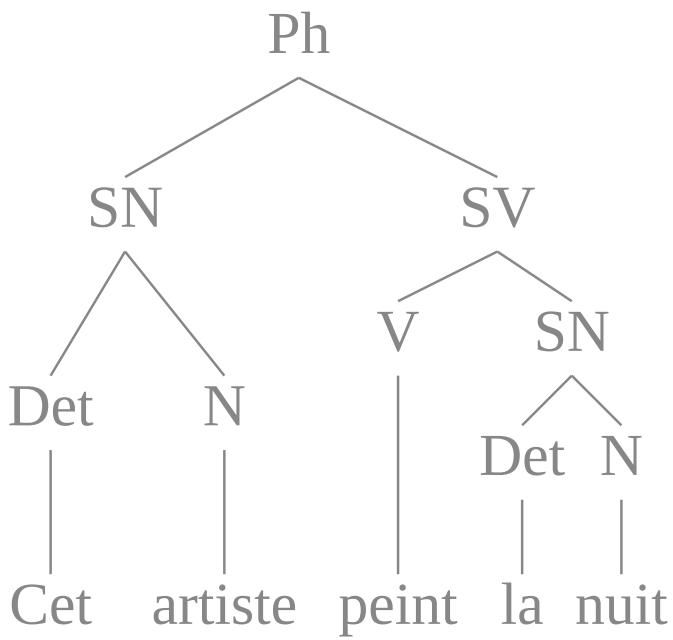
Exemple



$$\models_{\text{match}} \$[S' \rightarrow \text{Ph} \bullet \$][\text{Ph} \rightarrow \text{SN SV} \bullet][\text{SV} \rightarrow \text{V SN} \bullet][\text{SN} \rightarrow \text{Det N} \bullet] \| \$$$

Analyse descendante

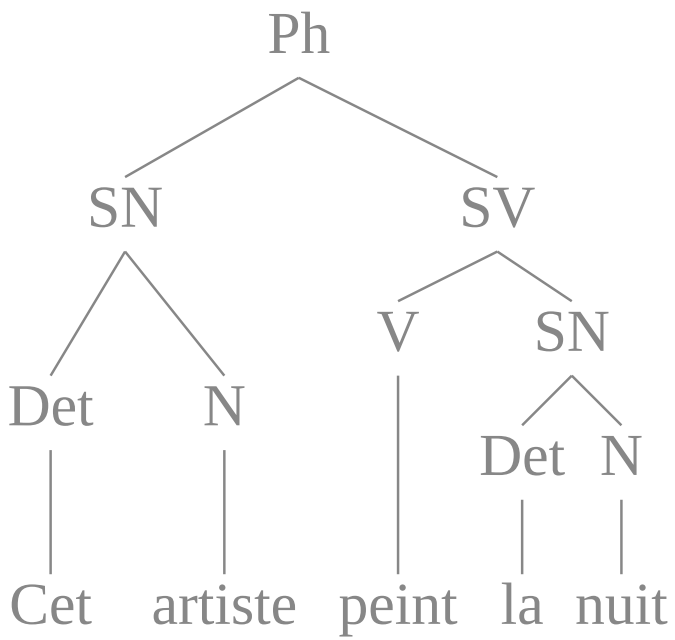
Exemple



$$\models \$[S' \rightarrow \mathrm{Ph} \bullet \$][\mathrm{Ph} \rightarrow \mathrm{SN}\ \mathrm{SV} \bullet][\mathrm{SV} \rightarrow \mathrm{V}\ \mathrm{SN} \bullet] \| \$$$

Analyse descendante

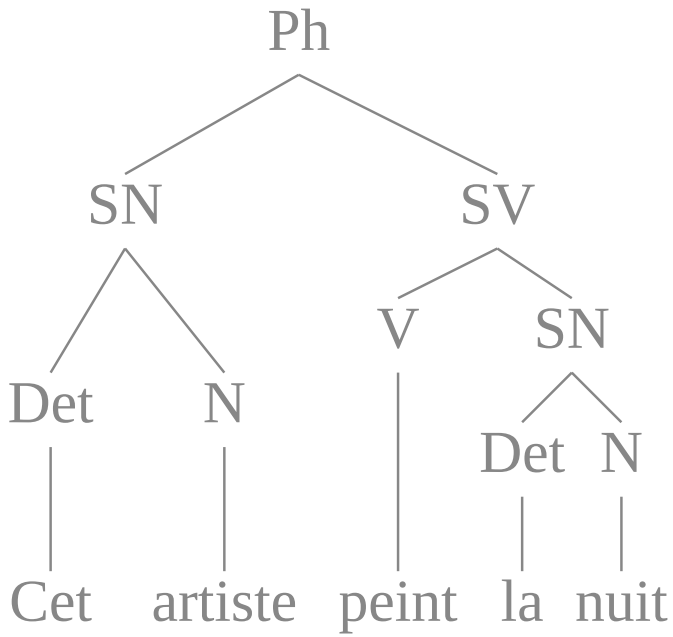
Exemple



$$\models \$[S' \rightarrow \mathsf{Ph} \bullet \$][\mathsf{Ph} \rightarrow \mathsf{SN}\ \mathsf{SV} \bullet] \| \$$$

Analyse descendante

Exemple



$$\models \$[S' \rightarrow \mathsf{Ph} \bullet \$] \| \$$$

Transducteur à pile

L'analyse précédente ne dit que si une phrase appartient au langage de $\mathcal{G}$ ou non.

Définition

Un transducteur à pile $\langle \mathcal{A}, \tau \rangle$ pour $\mathcal{G}$ est constitué d'un automate à pile $\mathcal{A}$ pour $\mathcal{G}$ et d'un homomorphisme τ de R^* dans P^* défini par

$$\tau([A \to \alpha \bullet B\alpha'] \| \vdash_{\text{predict}} [A \to \alpha B \bullet \alpha'][B \to \bullet \beta] \|) = B \to \beta,$$

$$\tau([A \to \alpha \bullet a\alpha'] \| a \vdash_{\text{match}} [A \to \alpha a \bullet \alpha']) = \varepsilon, \text{ et}$$

$$\tau([A \to \alpha \bullet] \| \vdash \|) = \varepsilon.$$

L'exemple précédent donnait les productions dans l'ordre d'une dérivation gauche.

Faiblesses de l'analyse descendante

1. L'automate à pile est non déterministe ; il nécessite un *backtrack* coûteux ;
2. l'ensemble de règles R permet des règles de la forme $[A \longrightarrow \bullet A\alpha] \| \vdash_{\text{predict}} [A \longrightarrow A \bullet \alpha][A \longrightarrow \bullet A\alpha] \|$ si la grammaire est récursive gauche.

Faiblesses de l'analyse descendante

1. L'automate à pile est non déterministe ; il nécessite un *backtrack* coûteux ;
2. l'ensemble de règles R permet des règles de la forme $[A \rightarrow \bullet A\alpha] \| \vdash_{\text{predict}} [A \rightarrow A \bullet \alpha][A \rightarrow \bullet A\alpha] \|$ si la grammaire est récursive gauche.

Faiblesses de l'analyse descendante

1. L'automate à pile est non déterministe ; il nécessite un *backtrack* coûteux ;
2. l'ensemble de règles R permet des règles de la forme $[A \rightarrow \bullet A\alpha] \| \vdash_{\text{predict}} [A \rightarrow A \bullet \alpha][A \rightarrow \bullet A\alpha] \|$ si la grammaire est récursive gauche.

La suite du cours sera consacrée à des constructions de machines déterministes plus puissantes.

En résumé

Les grammaires algébriques permettent

1. de générer des langages formels de la classe des langages algébriques ;
2. de structurer la syntaxe sous forme d'arbres de dérivation ;
3. une analyse à l'aide d'automates à pile.

En résumé

Les grammaires algébriques permettent

1. de générer des langages formels de la classe des langages algébriques ;
2. de structurer la syntaxe sous forme d'arbres de dérivation ;
3. une analyse à l'aide d'automates à pile.

En résumé

Les grammaires algébriques permettent

1. de générer des langages formels de la classe des langages algébriques ;
2. de structurer la syntaxe sous forme d'arbres de dérivation ;
3. une analyse à l'aide d'automates à pile.

En résumé

Les grammaires algébriques permettent

1. de générer des langages formels de la classe des langages algébriques ;
2. de structurer la syntaxe sous forme d'arbres de dérivation ;
3. une analyse à l'aide d'automates à pile.

En résumé

Les grammaires algébriques permettent

1. de générer des langages formels de la classe des langages algébriques ;
2. de structurer la syntaxe sous forme d'arbres de dérivation ;
3. une analyse à l'aide d'automates à pile.

Sur la dérivation d'un analyseur syntaxique généraliste, lire [Ear70] en préparation de la séance numéro 4.

Questions ?

Exercices

Exercice

Soit la grammaire

$$E \to E + T \mid T,\ \ T \to T * F \mid F,\ \ F \to a \mid (E). \qquad (\mathcal{G}_1)$$

Donner les arbres de dérivation correspondant aux phrases

1. $a + a * a + a$ et
2. $a * (a + a + a)$.

Donnez les étapes de l'analyse de ces phrases par un automate à pile récursif descendant.

Exercices

Exercice

Le langage $\{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ ou } j = k\}$ est intrinsèquement ambigu. Donnez une grammaire algébrique générant ce langage. Montrez l'ambiguïté de cette grammaire.


John W. Backus.
The syntax and semantics of the proposed international algebraic language of the Zürich ACM-GAMM Conference.
In *IFIP Congress*, pages 125–131, 1959.


David G. Cantor.
On the ambiguity problem of Backus systems.
Journal of the ACM, 9(4):477–479, 1962.


Noam Chomsky.
Three models for the description of language.
IEEE Transactions on Information Theory, 2:113–124, 1956.


Noam Chomsky.
On certain formal properties of grammars.
Information and Control, 2(2):137–167, 1959.


Noam Chomsky and Marcel Paul Schützenberger.
The Algebraic Theory of Context-free Languages.
Computer Programming and Formal Systems. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1963.