# Calculabilité / Complexité (L3)
# Devoir à la maison décembre 2016
# à rendre au plus tard lors du TD du 15 décembre*

## Exercice 1 : UNIQ_SAT

Le problème UNIQ_SAT est une variante de 3_SAT. On rappelle que 3_SAT considère des formules propositionnelles en forme normale conjonctive (CNF) telles que chaque clause contient exactement trois littéraux. Une instance a la forme $\psi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$, où chaque clause $C_i$ est de la forme $l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee l_{i,3}$ et où chaque littéral $l_{i,j}$ est soit une variable propositionnelle $p \in Prop = \{p, q, r, \ldots\}$, soit sa négation $\neg p$. On notera $l_{i,j} = \epsilon_{i,j} p_{i,j}$ avec $\epsilon_{i,j} \in \{+, -\}$.

Alors que 3_SAT est le problème de savoir s'il existe une valuation $v : Prop \to Bool$ qui valide $\psi$, UNIQ_SAT demande s'il existe une valuation qui valide *un et un seul* littéral dans chaque clause.

**Question 1.** Donnez une instance $\psi$ qui soit positive pour 3_SAT et négative pour UNIQ_SAT. Justifiez.

**Question 2.** Montrez que UNIQ_SAT est NP–complet. Justifiez la correction de votre réduction. Pour cette question, les seules réductions autorisées partent de problèmes vus en classe.

## Exercice 2 : SUBSETSUM

Le problème SUBSETSUM n'a pas été présenté en classe mais il est décrit dans le polycopié du cours. Il vous faut donc étudier les preuves des Propositions 7 et 8 (p. 20 *& seq.* du polycopié) où il est montré que SUBSETSUM est NP–complet quand les nombres $v_1, \ldots, v_n, w$ qui composent une instance sont donnés en binaire, et qu'il est dans P quand ces nombres sont donnés en base 1.

**Question 1.** On considère une version de SUBSETSUM où l'input consiste en un entier $d$ (la dimension) suivi de vecteurs $v_1, \ldots, v_n, w$ de $\mathbb{N}^d$ et où on doit décider s'il existe un sous ensemble $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $w = \sum_{i \in I} v_i$.

Pour ce problème, dénommé VECSUBSETSUM_unary, la dimension $d$ ainsi que les vecteurs sont donnés en base 1, c.-à-d. que la taille de l'input est en $O\big(d + \sum_{j=1}^{d} w[i] + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} v_i[j]\big)$.

Est-ce que ce problème est dans P ou bien est-il NP–difficile ? Justifiez précisément votre réponse.

---

*Vous pouvez rendre votre devoir par mail à `phs@lsv.fr`.

## Problème : chemins dans les graphes pondérés

On considère des graphes pondérés de la forme $G = (V, E, p)$ où les arêtes de $E \subseteq V \times V$ sont orientées et portent chacune un poids, un entier naturel donné par $p : E \to \mathbb{N}$.

On commence par définir ou rappeler quelques notions et notations qui seront utiles dans la suite de l'énoncé et dans vos solutions: Pour une arête $e = (u, v) \in E$, on note ${}^\bullet e$ pour $u$ et $e^\bullet$ pour $v$. Un *chemin de longueur $\ell$ dans $G$* est un mot $\rho = e_1 \cdots e_\ell \in E^+$ composé de $\ell > 0$ arêtes de $E$ et tel que ${e_{i-1}}^\bullet = {}^\bullet e_i$ pour tout $i = 2, \ldots, \ell$. Si $\rho = e_1 \cdots e_\ell$ est un chemin, les notations ${}^\bullet\rho$ et $\rho^\bullet$ désignent ${}^\bullet e_1$ et ${e_\ell}^\bullet$ respectivement. Le poids $p(\rho)$ d'un chemin est la somme $\sum_{i=1}^{\ell} p(e_i)$ des poids de ses arêtes.

Un chemin $\rho = e_1 \ldots e_\ell \in E^+$ est un *cycle* si ${e_l}^\bullet = {}^\bullet e_1$ et le cycle est *élémentaire* si les sommets ${}^\bullet e_1, \ldots, {}^\bullet e_\ell$ sont tous distincts.

Le problème $\mathsf{WEIGHTEDPATH}$ a comme input un graphe pondéré $G$, deux sommets $u, v \in E$, un poids $a \in \mathbb{N}$. Il s'agit de décider s'il existe dans $G$ un chemin allant de $u$ à $v$ et de poids total $a$.

Ce problème n'a pas été étudié en classe mais il est montré dans le polycopié du cours qu'il est dans $\mathsf{NP}$ (Proposition 10 p. 24, s'appuyant sur le lemme d'Euler).

**Question 1.** Lisez attentivement dans le polycopié la preuve de l'appartenance à $\mathsf{NP}$. Redonnez, en la détaillant, une preuve que s'il existe un chemin de poids $a$ allant de $u$ à $v$ alors il existe en particulier un tel chemin de longueur au plus $(a + 1)|V|$.

**Question 2.** On dit qu'un chemin $\rho$ est *factorisé en cycles* si $\rho$ est écrit sous la forme
$$\rho = \rho_0 \sigma_1^{k_1} \rho_1 \sigma_2^{k_2} \cdots \rho_{r-1} \sigma_r^{k_r} \rho_r$$
telle que les facteurs $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ sont des cycles élémentaires, les entiers $k_1, \ldots, k_r$ sont non nuls et les facteurs $\rho_0, \ldots, \rho_r$ n'ont aucun facteur qui soit un cycle. (La notation $w^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ dénote la concaténation de $k$ copies de $w$, avec $w^0 = \epsilon$ et $w^{k+1} = w^k \cdot w$).

Montrez que tout chemin admet une factorisation en cycles.

**Question 3.** Montrez que si $G$ admet un chemin de poids $a$ allant de $s$ à $t$ alors il existe en particulier un tel chemin avec une factorisation en cycles $\rho_0 \sigma_1^{k_1} \rho_1 \sigma_2^{k_2} \cdots \rho_{r-1} \sigma_r^{k_r} \rho_r$ telle que les $\sigma_i$'s ont tous des poids différents.

**Question 4.** On s'intéresse maintenant à des graphes où les poids sont des entiers relatifs. Pour $G = (V, E, p)$ avec $p : E \to \mathbb{Z}$, on notera $k$ le nombre $|V|$ de sommets, $m$ le nombre $|E|$ d'arêtes, et $P = \max_{e \in E} |p(e)|$ le plus grand poids (en valeur absolue). Ainsi la donnée du graphe utilise un espace mémoire en $O(k + m\lceil \log_2(P) \rceil)$.

Donnez un polynôme à quatre variables $Q(x_1, x_2, x_3, x_4)$ tel que pour toute instance $\langle G, u, v, a \rangle$, si $G$ a un chemin de poids $a$ reliant $u$ à $v$ alors il existe un tel chemin de longueur bornée par $Q(k, m, P, a)$.

**Question 5.** Quelle est la complexité de $\mathsf{WEIGHTEDPATH}$ quand les poids sont des entiers relatifs?