1 TD 2

Exercice 1 (INDEPENDENT SET) *Un* ensemble indépendant *dans un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un ensemble $C \subseteq V$ de sommets dont aucun sommet n'est relié à aucun autre par une arête de G, c'est-à-dire tel que $u, v \in C$ implique $\{u, v\} \notin E$.*
Démontrer que le langage INDEPENDENT SET défini comme suit est NP-*complet.*

ENTRÉE : *un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$ écrit en unaire ou en binaire (peu importe) ;*

QUESTION : *G a-t-il un ensemble indépendant de cardinal au moins m ?*

Montrer que INDEPENDENT SET reste NP-*complet même lorsqu'il est restreint aux graphes où chaque sommet est au plus de degré 4.*

Solution. D'abord, INDEPENDENT SET est dans NP : il suffit de deviner une partie C de V, et de vérifier qu'elle est de cardinal au moins m et qu'elle forme un ensemble indépendant.

Réciproquement, on réduit 3SAT. On part donc d'un ensemble de 3-clauses S qui ne contient pas la clause vide, ni aucune tautologie ni aucune clause unitaire. Pour chaque clause $L_1 \vee L_2 \vee L_3$, on fabrique trois sommets frais formant un triangle. De même pour les clauses de taille 2 $L_1 \vee L_2$, on fabrique deux sommets frais reliés par une arête. (On appellera ceci encore un triangle... dégénéré.) Pour toute clause C contenant un littéral $+A$ et toute clause C' contenant le littéral opposé $-A$, on relie les sommets correspondants. Aucun ensemble indépendant ne peut contenir plus d'un sommet par triangle, donc, s'il y a m clauses dans S, aucun ensemble indépendant n'est de cardinal strictement supérieur à m. S'il existe un ensemble indépendant I de cardinal m, il contient exactement un sommet de chaque clique. Si un sommet étiqueté $+A$ est dans I, aucun sommet de I ne peut être étiqueté $-A$, et réciproquement : ceci fournit directement une affectation satisfaisant S. Réciproquement, si ρ est une affectation satisfaisant S, on forme un ensemble indépendant en sélectionnant un littéral vrai dans chaque clause.

$\square$

Exercice 2 (NODE COVER) *Un* recouvrement *C d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un ensemble $C \subseteq V$ de sommets tel que toute arête de E est incidente à C, c'est-à-dire à au moins un élément de C. Démontrer que le langage NODE COVER défini comme suit est* NP-*complet.*

ENTREE : *un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $m \in \mathbb{N}$ écrit en unaire ou en binaire (peu importe) ;*

QUESTION : *G a-t-il un recouvrement de cardinal au plus m ?*

Solution. C est un recouvrement de G (de cardinal au plus m) si et seulement si $V \setminus C$ est un ensemble indépendant de G (de cardinal au moins le cardinal de V moins m). $\square$

Exercice 3 (CLIQUE) *Une* clique C *d'un graphe non orienté* $G = (V, E)$ *est un sous-ensemble* $C \subseteq V$ *induisant un sous-graphe complet de* G*, c'est-à-dire tel que pour tous* $u, v \in C$ *avec* $u \neq v$*, on a* $\{u, v\} \in E$*. Montrer que le problème CLIQUE défini comme suit est* NP*-complet.*

ENTRÉE : *un graphe non orienté* $G = (V, E)$*, un entier* $m \in \mathbb{N}$ *écrit en unaire ou en binaire (peu importe) ;*

QUESTION : G *a-t-il une clique de cardinal au moins* m *?*

Solution. Soit $\overline{G}$ le graphe *complémentaire* de G, c'est-à-dire $\overline{G} = (V, \overline{E})$, où $\overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$. Alors C est une clique de G si et seulement si C est un ensemble indépendant de $\overline{G}$. Comme le calcul de $\overline{G}$ se fait en temps polynomial, INDEPENDENT SET $\preceq$ CLIQUE. Or CLIQUE $\in \mathsf{NP}$: il suffit de deviner la clique, de vérifier qu'elle est de cardinal au moins m, et que c'est bien une clique.

$\square$

Exercice 4 (3-COLORING) *Une* k-coloration *d'un graphe non orienté* $G = (V, E)$ *est une fonction* $c : V \to \{0, \dots k-1\}$ *telle que si* $\{u, v\} \in E$ *alors* $c(u) \neq c(v)$*.*

Montrer que le problème de 3-coloration est NP*-complet.*

ENTRÉE : *un graphe non orienté* G *;*

QUESTION : *Existe-t-il une* 3*-coloration de* G *?*

Montrer que le problème reste NP*-complet pour les graphes planaires de degré borné par 4.*

Solution. Assurons-nous tout d'abord que 3-COLORING est dans NP : on peut deviner un 3-coloriage c des sommets du graphe et vérifier ensuite que pour tout $(v, v') \in E$ on a bien $c(v) \neq c(v')$, et on a donc moins de $|E|$ tests d'inégalité de couleurs. Montrons maintenant que $3 - SAT \preceq 3 - COL$, donc que $3 - COL$ est $NP - difficile$. Soit φ une formule $3 - CNF$, $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} C_i$, où chaque clause C_i est de la forme $l_{i_1} \vee l_{i_2} \vee l_{i_3}$. On se donne 3 couleurs : V, F et A. Pour effectuer notre réduction, on va avoir besoin d' OR-gadgets, qui vont nous permettre de "traduire" la satisfaction d'une clause en 3-coloriage. On remarquera sur la *Figure* $1(a)$ qu'on a bien l'équivalence entre le 3-coloriage du gadget et l'assignation d'au moins une variable de la disjonction à Vrai. On combine simplement 2 gadgets dans le cas d'une clause à 3 littéraux (voir *Figure* $1(b)$. Construisons à présent à partir de notre instance φ de $3 - SAT$ une instance $G_\varphi = (V_\varphi, E_\varphi)$ de $3 - COL$. V_φ contient :

- un sommet a ;
- un sommet v ;
- un ensemble de sommets S composé de toutes les variables de φ et leurs négations ;
- un ensemble de sommets C composé de tous les littéraux appartenant à une clause de φ ;

– les sommets correspondants aux OR-gadgets de chaque clause de φ.

Décrivons maintenant E_φ :

– dans S, chaque variable et sa négation son reliés par une arête, et tous les sommets de S sont aussi reliés à a ;
– pour chaque clause C_i de φ, on construit un sous-graphe de clause comme sur la *Figure* $1(b)$, avec les sommets de C correspondants comme sommets d'entrée, et le sommet v comme sommet de sortie commun ;
– chaque sommet de C est relié à sa négation dans S et au sommet a
– v est relié à a.

La construction de G_F se fait polynômialement.

Montrons maintenant l'équivalence φ est satisfaisable **si et seulement si** G_φ est 3-coloriable :

$\Rightarrow$: φ est satisfaisable, c'est-à-dire il existe une valuation σ des variables de φ dans $\{Vrai, Faux\}$ qui satisfait φ. On va colorier G_φ suivant σ, ce qui signifie que si $\sigma(v_i) = Vrai$ (resp. $Faux$), on colorie le sommet v_i dans S avec la couleur V (resp. F), et le sommet associé correspondant à $\neg v_i$ avec la couleur F (resp. V). On colorie donc le sommet a avec la couleur A, et les couleurs des sommets de C sont à déduire du coloriage de a et des sommets de S. Comme σ est une valuation satisfaisant φ, on a pour chaque C_i un littéral vrai, donc un sommet de C colorié avec la couleur V. On a vu plus haut que les OR-gadget nous autorisent donc à colorier le sommet v en V tout en garantissant que les sommets reliés dans les OR-gadgets soient bien de couleurs différentes. (v peut être colorié en V car **toutes** les clauses sont satisfaites !).

$\Leftarrow$: G_φ est 3-coloriable. Soit c un coloriage correct de G_φ. Quitte à renommer les couleurs de c, on considère que A est la couleur de a, V est la couleur de v, et F est la troisième couleur. Tous les sommets de S et C sont reliés à a, donc sont exclusivement coloriés en V ou F. De plus, les arêtes entre les sommets de S et leur négations dans S et dans A empêchent le coloriage d'un littéral et de sa négation dans une même couleur. En regardant le coloriage des sommets de S on déduit donc une valuation σ pour les variables de φ qui n'est pas contradictoire. v étant colorié en V, on a bien pour chaque sous-graphe de clause au moins un sommet d'entrée colorié en V, ce qui nous confirme que σ est bien une valuation qui satisfait φ.

On pourra se reporter à la *Figure* 2 pour observer un exemple de construction et de 3-coloriage de G_φ à partir de φ, où $\varphi = (l_1 \vee \neg l_1 \vee l_2) \wedge (\neg l_2 \vee l_3 \vee \neg l_3) \wedge (\neg l_1 \vee \neg l_2 \vee \neg l_3)$.

□

Exercice 5 (GRAPH HOMOMORPHISM) *Un homomorphisme d'un graphe $G = (V, E)$ à un graphe $G' = (V', E')$ est une fonction $h : V \to V'$ telle que pour tout $\{v_1, v_2\} \in E$, on a $\{h(v_1), h(v_2)\} \in E'$.*
Montrer que le problème suivant est NP*-complet.*

ENTRÉE : *deux graphes non-orientés, G_1 et G_2 ;*

QUESTION : *Existe-t-il un homomorphisme de G_1 à G_2 ?*

Solution.
GRAPH HOMOMORPHISM $\in \mathsf{NP}$ et
3-COLORING $\preceq$ GRAPH HOMOMORPHISM. $\square$

Exercice 6 (SUBGRAPH ISOMORPHISM) *Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont isomorphes si $|V| = |V'|$ et $|E| = |E'|$ et il existe une fonction bijective $h : V \to V'$ telle que $\{v_1, v_2\} \in E$, si et seulement si $\{h(v_1), h(v_2)\} \in E'$.*
Montrer que le problème suivant est NP-complet.

ENTRÉE : *Deux graphes G et H.*

QUESTION : *Est-ce que G contient un sous-graphe isomorphe à H ?*

Solution.
SUBGRAPH ISOMORPHISM $\in \mathsf{NP}$ et
CLIQUE $\preceq$ SUBGRAPH ISOMORPHISM. $\square$

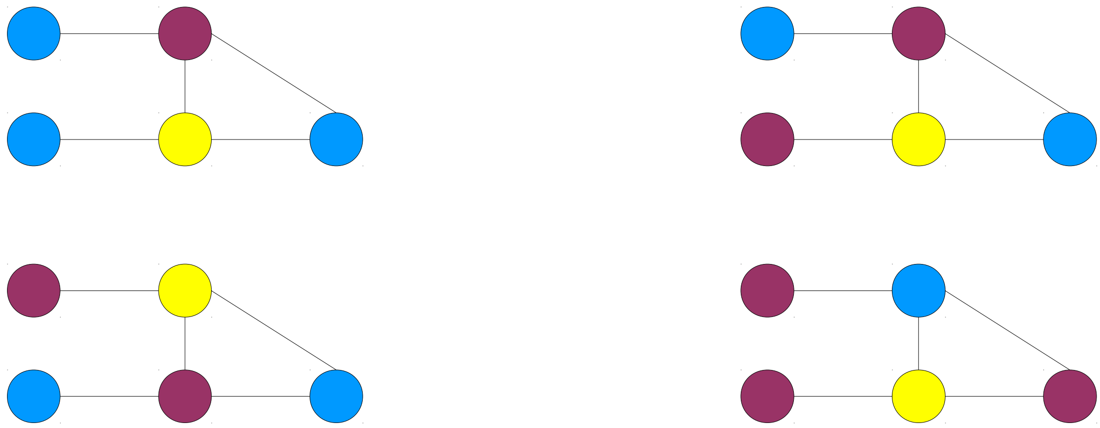

Figure 1 (a) : OR-gadget

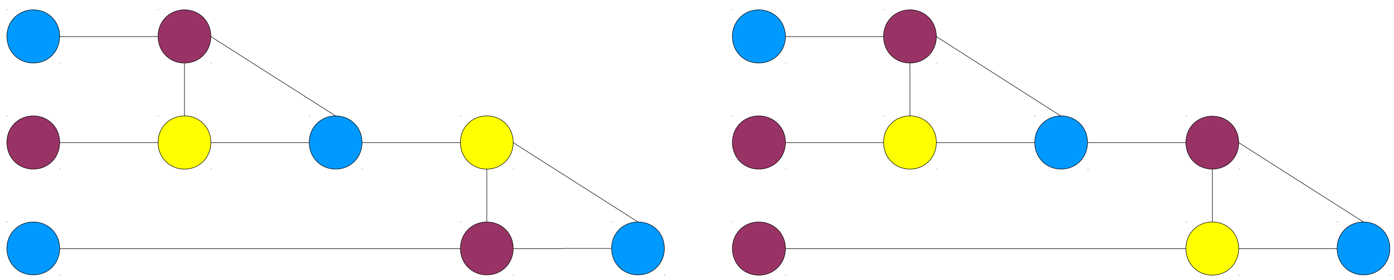

Figure 1 (b)

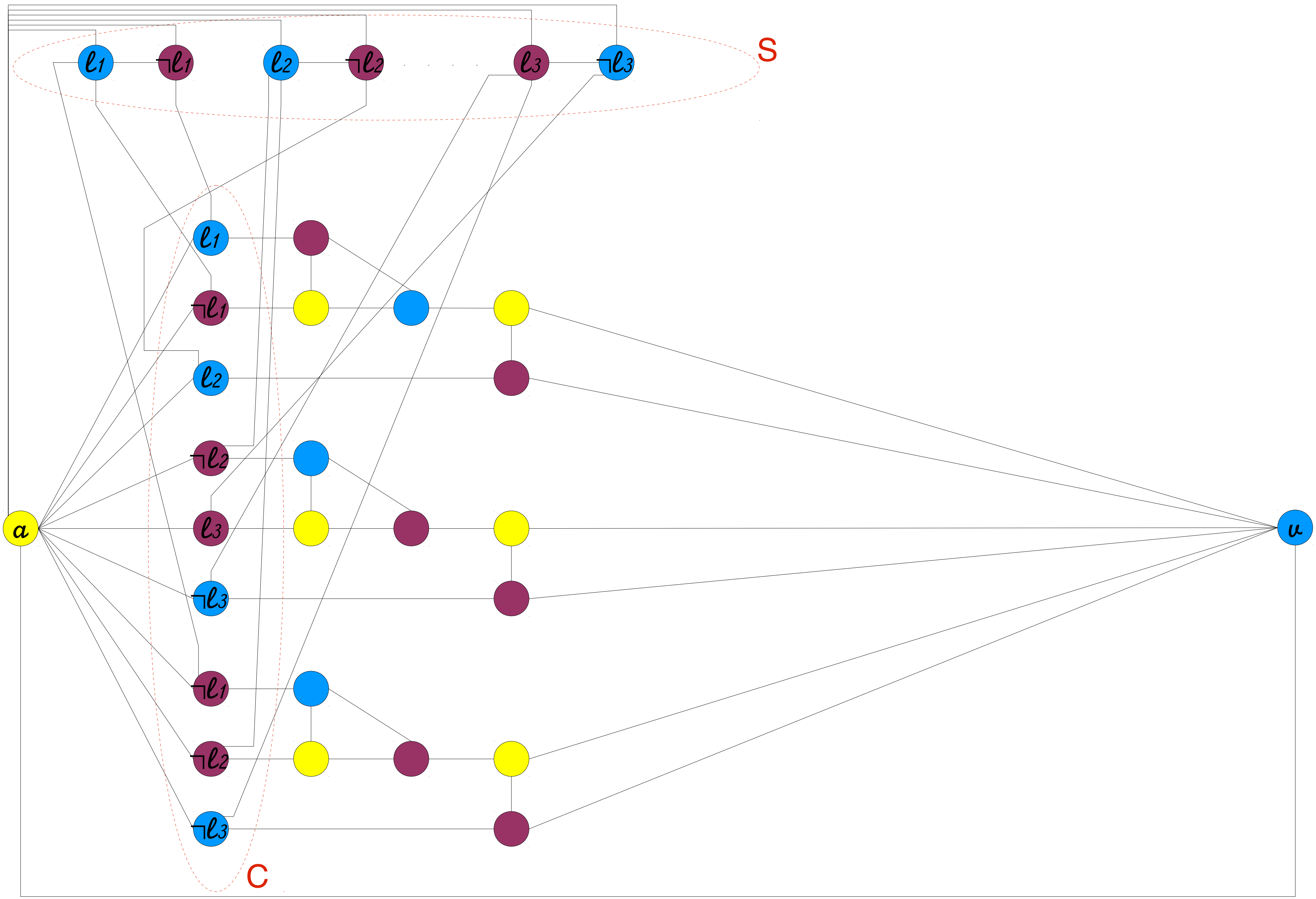

Figure 2