

Complexité — Bonus

1 SAT...

- i) Montrer que 3-SAT reste NP-complet si l'on restreint le problème aux expressions où chaque variable apparaît au plus 3 fois et chaque littéral au plus 2 fois. (Puis faire le lien avec IND-SET où chaque sommet est de degré au plus 4.)
- ii) Montrer que 2-SAT \in PTIME.

Indication : Considérer une formule ϕ 2-CNF et construire un graphe orienté $G(\phi)$ tel que ses sommets sont les variables de ϕ et leur négations, et ses arêtes correspondent aux implications de ϕ . Puis montrer que ϕ est insatisfaisable si et seulement si il existe une variable x de ϕ telle que l'on ait un chemin de x à $\neg x$ et un chemin de $\neg x$ à x dans $G(\phi)$.

2 Examen Complexité 2011/2012

Le problème 1-in-3SAT, donné par un ensemble de m clauses de trois littéraux (parmi n propositions ou leur négation), consiste à décider s'il existe une interprétation ν des propositions telle que pour chaque clause *exactement* un littéral soit vrai.

Question 1 Montrer que le problème 1-in-3SAT est dans NP.

On note $R(x, y, z)$ le prédicat qui est vrai si et seulement si exactement une des trois propositions x, y, z est vraie.

Question 2 Démontrer que la formule $x \vee y \vee z$ est équivalente à la formule existentiellement quantifiée :

$$\exists a, b, c, d, e, f R(x, a, d) \wedge R(y, b, d) \wedge R(z, c, \mathbf{false}) \wedge R(a, b, e) \wedge R(c, d, f)$$

Question 3 Démontrer que la formule $R(x, y, \mathbf{false})$ est équivalente à la formule existentiellement quantifiée :

$$\exists z R(x, y, z) \wedge R(z, z, \neg z)$$

Question 4 En vous servant des questions 2 et 3, établir une réduction en temps polynomial de 3SAT vers 1-in-3SAT. En déduire que 1-in-3SAT est NP-complet.