TD 8

Exercice 1. Dessinez les ensembles ordonnés suivants et indiquez lesquels sont des DCPO. Justifiez.

1. $\mathbf{1} = \{\perp\}$
2. $\mathbf{Bool}_\perp = \{0, 1, \perp\}$ avec $x < y$ ssi $x = \perp$ et $y \neq \perp$.
3. $\mathbb{N}$ avec l'ordre usuel (*i.e.* ω pour les intimes).
4. $\mathbb{N}_\perp$ avec $x < y$ ssi $x = \perp$ et $y \in \mathbb{N}$.
5. $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ avec l'ordre usuel étendu par $n \leq \infty$ pour tout n (*i.e.* $\omega + 1$ pour les intimes).
6. $\mathbb{N}^2$ avec l'ordre produit.

Let $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

7. $\{[x, y] \mid x, y \in I, x \leq y\}$ avec l'ordre $\supseteq$.
8. $\{[x, y] \mid x, y \in I \cap \mathbb{Q}, x \leq y\}$ avec l'ordre $\supseteq$.

Definition. Soit $(D, \leq)$ un DCPO. Une partie $O \subseteq D$ est appellée un *ouvert de Scott* si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

— O est clos vers le haut : si $x \in O$ et $y \geq x$, alors $y \in O$;

— O est «inaccessible» par les sups : si E est une partie dirigée et si $\sup E \in O$, alors $E \cap O \neq \emptyset$.

Une fonction $f : X \to Y$ est *Scott-continue* is et seulement si :

— f est monotone,

— et pour toute famille dirigée D qui a un sup $\bigvee D$, la famille $f(D)$ a un sup et $f(\bigvee D) = \bigvee f(D)$.

Exercice 2. On considère $\mathbf{Bool}_\perp = \{0, 1, \perp\}$ ordonné comme précédement.

1. Quels sont les ouverts de Scott de $\mathbf{Bool}_\perp$? Les fermés ?
2. Exhibez toutes les fonctions croissantes de $\mathbf{Bool}_\perp$ dans $\mathbf{Bool}_\perp$.
3. Soit D un DCPO, et f une fonction croissante de $\mathbf{Bool}_\perp$ dans D. Montrez que f est Scott-continue.
4. Dessinez $\mathbf{Bool}_\perp \times \mathbf{Bool}_\perp$ (ordre produit).
5. Énumérez les fonctions Scott-continues f telle que f restreinte à $\{0, 1\}$ définit la fonction booléenne «ou».
6. En voyant $\perp$ comme «un calcul divergent», donnez une interprétation calculatoire de chacun des prolongements à $\mathbf{Bool}_\perp$ de la fonction booléenne «ou».
7. Soit $\{[x, y] \mid x, y \in [0, 1] \subset \mathbb{R}, x \leq y\}$ avec l'ordre $\supseteq$. Donnez une fonction croissante de J dans $\mathbf{Bool}_\perp$ qui n'est pas Scott-continue.

Exercice 3. On considère maintenant l'ensemble ordonné $\mathbb{N}_\perp$ muni de l'ordre $\perp \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Quels sont les ouverts de Scott de $\mathbb{N}_\perp$? Les fermés ?
2. Quelles sont les fonctions Scott-continues de $\mathbf{Bool}_\perp$ dans $\mathbb{N}_\perp$? De $\mathbb{N}_\perp$ dans $\mathbf{Bool}_\perp$? De $\mathbb{N}_\perp$ dans lui même ?
3. Soit D un DCPO, et f une fonction croissante de $\mathbb{N}_\perp$ dans D. Montrez que f est Scott-continue.

Exercice 4. Soit $S = \{0, 1\}^\infty = \{0, 1\}^* \cup \{0, 1\}^\omega$, avec l'ordre préfixe.

1. Montrez que S est un DCPO. Est-ce un treillis ?
2. Quels sont les éléments maximaux de S ?
3. Soit f une fonction de S dans $\mathbf{Bool}_\perp$ telle que :

$$\forall s \in \{0, 1\}^\omega \begin{cases} f(s) = 1 & \text{si } s \text{ contient le facteur } 0 \cdot 1 \\ f(s) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrez que f n'est pas Scott-continue. Intuition ?

4. Soit $J = \{[x, y] \mid x, y \in [0, 1] \subset \mathbb{R}, x \leq y\}$ avec l'ordre $\supseteq$. On considère la fonction $v : S \to J$:

$$v(b_1 \cdot b_2 \cdots b_n) = \left[\sum_{i=1}^{n} 2^{-i} b_i, \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} b_i + 2^{-n}\right]$$
$$v(b_1 \cdot b_2 \cdots) = \left\{\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} b_i\right\}$$

A quoi sert v ? Montrez que v est Scott-continue. Est-elle injective ?

Exercice 5. Treillis complet :
Montrer que l'ensemble des parties d'un ensemble A quelconque est un treillis complet.

Theorem 1 (KNASTER-TARSKI)**.** Soit $(X, \leq)$ un treillis complet et $f : X \to X$ une fonction monotone. Alors f a un plus petit point fixe $\mathrm{lfp}(f)$ et un plus grand point fixe $\mathrm{gfp}(f)$. De plus, l'ensemble $Fix(f)$ des points fixes de f est un treillis complet (pour $\leq$).

Exercice 6. Sur le théorème de KNASTER-TARSKI :

1. Finissez la démonstration vue en cours.
2. Démontrez le thérorème de CANTOR-SCHRÖDER-BERNSTEIN : si A et B sont deux ensembles tels qu'il existe une injection f de A dans B et une injection g de B dans A, alors A et B sont équipotents. *Indication : chercher $X \subseteq A$ tel que pour $Y = B \setminus f(X)$, on a $g(Y) = A \setminus X$.*

Exercice 7.

1. Montrez qu'une fonction $f : [0, 1] \to [0, 1]$ monotone admet un point fixe.
2. Montrez que si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est une fonction monotone alors :

$$f\left(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} x_n\right) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) \text{ pour toute suite croissante à valeurs dans } [0, 1]$$
$$\text{ssi } f \text{ est continue à gauche sur } [0, 1]$$

3. En déduire que $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f^n(\bot)$ n'est pas toujours un point fixe de f.