

TD 7

Exercice 1. Dans cet exercice, on s'intéresse à la sémantique opérationnelle à petits pas de IMP, rappelée en figure 1.

1. Progrès : Montrez que les états terminaux, c'est à dire les couples (C, ρ) tels que pour tous couples (C', ρ') , $(C, \rho) \not\rightarrow (C', \rho')$, sont **exactement** les couples de la forme (ε, ρ) .
2. Déterminisme : Montrez que pour tout état (C, ρ) , il existe au plus un état (C', ρ') tel que $(C, \rho) \rightarrow (C', \rho')$.
3. Non Terminaison : Donnez un exemple de programme c tel que pour tout environnement ρ et pour tout état final (ε, ρ') , $(c \cdot \varepsilon, \rho) \not\rightarrow^* (\varepsilon, \rho')$.

$$\begin{aligned}
 (x := e \cdot C, \rho) &\rightarrow (C, \rho[x \mapsto \llbracket e \rrbracket \rho]) \\
 (\text{skip} \cdot C, \rho) &\rightarrow (C, \rho) \\
 (c_1; c_2 \cdot C, \rho) &\rightarrow (c_1 \cdot c_2 \cdot C, \rho) \\
 (\text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2 \cdot C, \rho) &\rightarrow (c_1 \cdot C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho \neq 0 \\
 (\text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2 \cdot C, \rho) &\rightarrow (c_2 \cdot C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho = 0 \\
 (\text{while } e \text{ do } c \cdot C, \rho) &\rightarrow (c \cdot \text{while } e \text{ do } c \cdot C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho \neq 0 \\
 (\text{while } e \text{ do } c \cdot C, \rho) &\rightarrow (C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho = 0
 \end{aligned}$$

FIGURE 1 – La sémantique opérationnelle à petits pas de IMP.

Exercice 2. On s'intéresse à une sémantique opérationnelle des expressions arithmétiques dite à petits pas (cf. figure 2).

1. Donnez une preuve que $((x \dot{+} (\dot{-}y)) \dot{+} \dot{2}, \rho[x \mapsto 3, y \mapsto 1]) \rightarrow_{pp}^* (\dot{4}, \rho[x \mapsto 3, y \mapsto 1])$.
2. Montrez que les règles ont les propriétés suivantes :
 - (a) Progrès : les états terminaux (ceux pour lesquels aucune règle ne s'appliquent) sont de la forme (\dot{n}, ρ) où n est un entier.
 - (b) Déterminisme : étant donné une expression e et un environnement ρ , il existe au plus un couple (e', ρ') tel que $(e, \rho) \rightarrow_{pp} (e', \rho')$

Exercice 3. Soit c un programme et ρ un environnement. Montrez que s'il existe une suite infinie $(c \cdot \varepsilon, \rho) = q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow \dots \rightarrow q_n \rightarrow \dots$, alors pour tout environnement ρ_∞ , le jugement $\rho \vdash c \Rightarrow \rho_\infty$ n'est pas dérivable.

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{(x, \rho) \rightarrow_{pp} (\widehat{\rho(x)}, \rho)} \text{ (Var)} \qquad \frac{(e_1, \rho) \rightarrow_{pp} (e'_1, \rho)}{(e_1 \dot{+} e_2, \rho) \rightarrow_{pp} (e'_1 \dot{+} e_2, \rho)} \text{ (+}\ell\text{)} \\
 \\
 \frac{(e_2, \rho) \rightarrow_{pp} (e'_2, \rho)}{(\dot{n} \dot{+} e_2, \rho) \rightarrow_{pp} (\dot{n} \dot{+} e'_2, \rho)} \text{ (+}_r\text{)} \qquad \frac{}{(\dot{n} \dot{+} \dot{m}, \rho) \rightarrow_{pp} (\widehat{\dot{n} + \dot{m}}, \rho)} \text{ (+fin)} \\
 \\
 \frac{(e, \rho) \rightarrow_{pp} (e', \rho)}{(\dot{-}e, \rho) \rightarrow_{pp} (\dot{-}e', \rho)} \text{ (-)} \qquad \frac{}{(\dot{-}\dot{n}, \rho) \rightarrow_{pp} (\widehat{\dot{-}n}, \rho)} \text{ (-fin)}
 \end{array}$$

FIGURE 2 – Sémantique opérationnelle à petits pas des expressions arithmétiques.