Exercice 1. Simplifier:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$$

Exercice 2. On se propose de démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas d'application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(f(n)) = n + 2017$$

1. Justifier que f est injective.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n + 2017) = f(n) + 2017$
3. Soit π la surjection canonique de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}/2017\mathbb{Z}$ (qui envoie un élement n sur sa classe modulo 2017). Démontrer que $g = \pi \circ f$ définit par factorisation une bijection de $\mathbb{Z}/2017\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/2017\mathbb{Z}$. On note $\overline{f}$ cette bijection.
4. Justifier que $\overline{f}$ admet au moins un point fixe.
5. Soit n_0 un entier naturel tel que $f(n_0) \equiv n_0$ modulo 2017. En étudiant l'ensemble des entiers de la forme $f(n_0 + K2017)$, $K = 0, 1, \ldots,$ conclure.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On note S_n le groupe symétrique, groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

1. Soit (i, j) une transposition dans S_n ($i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $i \neq j$). Soit ϕ une permutation dans S_n. Démontrer que $\phi(i, j)\phi^{-1}$ est la transposition $(\phi(i), \phi(j))$.
2. On note σ le n-cycle $(1, 2, \ldots, n)$ et τ le $n-1$-cycle $(1, \ldots, n-1)$. Quelle est la permutation τ^{-1}? Quelle est la permutation $\tau^{-1} \circ \sigma$?
3. Démontrer que σ et τ engendrent S_n.

Exercice 4. On se déplace sur $\mathbb{N}^2$ en partant d'un point $(0, 0)$ et en effectuant une suite finie de déplacements élémentaires. Les déplacements élémentaires sont de trois types: soit un pas à l'est (on passe du point (x, y) au point $(x + 1, y)$), soit un pas vers le nord est (on passe du point (x, y) eu point $(x + 1, y + 1)$), soit un pas vers le sud est (on passe du point (x, y) au point $(x + 1, y - 1)$). Tous les chemins considérés sont dans le quart de plan $\mathbb{N}^2$. Ils ne traversent pas l'axe Ox.

Si n est un entier naturel, on note M_n le nombre de chemins menant du point $(0, 0)$ au point $(n, 0)$.

1. On pose $M_0 = 1$. Déterminer M_1 et M_2.
2. Donner une relation de récurrence satisfaite par M_n. On pourra partitionner l'ensembles de ces chemins selon le dernier point rencontré par le chemin sur l'axe Ox (autre que l'origine).

(bonus) 3. Soit S la série formelle:

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} M_n X^n$$

Démontrer que S vérifie une équation du second degré qu'on explicitera. En déduire une expression de S.

Exercice 5. In this exercise we study a proof of the *Markov chain Tree Theorem*[1].

In what follows, let (V, E) be a directed graph. A i-spanning tree of (V, E) is a tree rooted in i and such that (1) its edges are from E and (2) for every $v \in V$, there is a path from v to i in the tree. We denote with T_i the set of i-spanning trees.
A graph is said to be *functional* whenever each of its vertices has exactly one outgoing edge.

1. Informally describe a what a strongly connected functional subgraph looks like.

A functional subgraph having exactly one cycle that goes through i and is not a loop (that is, not an edge of the form (i, i)) is called i-unicyclic. We denote with C_i the set of the i-unicyclic subgraphs of (V, E) and assume, from now on, that (V, E) is strongly connected.

2. Show that there exists a bijection between C_i and $T_i \times \{j \mid (i, j) \in E, i \neq j\}$;
3. Show that there exists a bijection between C_i and $\cup_{j \neq i} T_j$.

Let $W : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ be a weight function assigning a weight to each edge of (V, E). For any subgraph G of (V, E), we define its weight $\pi(G)$ as the product of the weights of the edges in G. The rooted spanning tree vector $w \in \mathbb{R}^V$ is defined by

$$w_i = \sum_{T \in T_i} \pi(T)$$

i.e. w_i is the sum of the weights of all i-spanning trees.

4. Show that $w_i \cdot \sum_{\substack{(i,j) \in E \\ i \neq j}} W(i, j) = \sum_{\substack{(j,i) \in E \\ i \neq j}} W(j, i) \cdot w_j$.
5. Let A be the transition matrix of a finite Markov chain. Let S be the set of states of the chain. By considering $(V, E) = (S, S \times S)$ and $W(i, j) = A_{i,j}$, conclude that $wA = w$.
6. Compute w for

$$A = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Exercice 6. Un jeu de “échelles et serpents” se joue sur un damier, supposé pour l’exercice de taille (3,3) avec une pièce équilibrée. Les cases sont numérotées de 1 à 9 et les joueurs se déplacent de la case 1 à la case 9 en avancant d’une ou deux cases selon que la pièce tombe sur pile ou face respectivement. Certaines cases sont reliées par une échelle ou par un serpent. Lorsqu’un joueur arrive sur une case au pied d’une èchelle, il monte l’échelle directement. Lorsqu’un joueur arrive sur une case sur la tête du serpent il glisse jusqu’à la case qui contient la queue du serpent.

Dans ce jeu, il y a une échelle qui monte de la case 2 á la case 7, une échelle qui monte de la case 3 à la case 5, un serpent dont la queue est sur la case 1 et la tête sur la case 6 et un serpent dont la queue est sur la case 4 et la tête sur la case 8.

Un joueur démarre sur la case 1 et déplace son pion selon d’une ou deux cases par jet de pièce jusqu’á la case 9, le jeu étant alors terminé.

1. Modéliser le jeu d’un joueur par une chaîne de Markov á 5 états. Expliquer votre démarche. Dessiner la chaîne de Markov (on expilquera précisément les choix faits pour numéroter les états).
2. Écrire la matrice de transition.

[1] as presented in “The Markov Chain Tree Theorem in commutative semirings and the State Reduction Algorithm in commutative semifields” by B. B. Gursoy et al.

3. Justifier que le joueur peut terminer une partie presque sûrement.
4. Calculer le temps moyen d'une partie.
5. On suppose maintenant que deux joueurs jouent alternativement jusqu'á qu'un des deux joueurs atteigne la case 9. Expliquer comment modéliser une partie: décrire la chaîne de Markov utilisée (espace d'états, transitions). Justifier que la partie termine presque sûrement et proposer une majoration du temps moyen d'une partie.

Exercice 7. On condisère le graphe de sommets $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ probabilisé de la façon suivante: en létat i, on jette un dé équilibré i fois et on va sur létat j, j étant le maximum des valeurs obtenues.

1. Exprimer en fonction des entiers p et j la probabilité que le maximum des valeurs obtenues en jetant p fois un dé équilibré soit intérieur ou égal à j.
2. Exprimer le coefficient $p_{i,j}$ de la matrice de transition P de cette chaîne de Markov en fonction de i et j.
3. Justifier que: $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \forall j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, p_{i,j} \leq p_{i,j+1}$.
4. Justifier que la chaîne de Markov admet une unique loi stationnaire $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$.
5. Démontrer que $u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_6$.
6. Pour k dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on note N_k la variable aléatoire qui compte le nombre de passages sur létat k, c'est-à-dire que pour tout entier n, $N_k(n) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{X_j=k}$. La variable $\frac{1}{n} N_k(n)$ représente ainsi la fréquence des passages sur l'ètat k.
   (a) Exprimer $E(\mathbf{1}_{X_j=k} | X_0 = i)$ en fonction de la matrice P.
   (b) en déduire que la suite $(E(\frac{1}{n} N_k(n) \mid X_0 = i))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite et déterminer cette limite. Pour quelle valeur de k est-elle maximale?

Exercice 8. Soit p un nombre premier.

1. Soit S un ensemble fini. Soit f une application de S dans S telle que $f \neq Id$ et $f^p = Id$. Justifier que $|S|$ est congru modulo p au cardinal de l'ensemble des points fixes de f.
2. Soit N un entier naturel non nul. On effectue la division euclidienne de N par p: $N = pn + r$ avec $0 \leq r < p$. On considère l'ensemble T des tableaux á N cases, les cases étant réparties sur p lignes et n colonnes et une $n + 1$-colonne ayant uniquement r cases, chaque case pouvant contenir un 0 ou un 1.

   Soit M un entier tel que $1 \leq M \leq N$. Dans T, on considère le sous-ensemble S des tableaux ayant M cases contenant un 1, les autres contenant un 0.

   (a) Quel est le cardinal de S?
   (b) Soit f l'application qui permute circulairement les p lignes d'un tableau de S sans modifier la $n + 1$-ième colonne. En utilisant f, justifier la congruence
   $$\binom{N}{M} \equiv \binom{n}{m} \binom{r}{q} \quad [p]$$
   où l'entier naturel m est le quotient de la division euclidienne de M par p: $M = pm + q$ avec $0 \leq q < p$.
   (c) Calculer $\binom{2018}{79}$ modulo 11.