Exercice 1. Une souris se déplace entre le grenier et la cuisine. Elle sort du grenier pour aller grignoter dans la cuisine avec probabilité 1/3. Dans la cuisine, elle retourne dans el grenier avec probabilité 1. Le chat se se déplace entre le jardin et la cuisine. S'il est dans le jardin, il rentre dans la cuisine avec probabilité 1/4. S'il est dans la cuisine, il sort avec probabilité 1/2. On suppose que les déplacements du chat et de la souris sont indépendants. Si le chat et la souris se trouvent tous deux dans la cuisine, le chat mange la souris.

1. Modéliser les déplacements du chat et de la souris par une chaîne de Markov à 4 états.
2. Justifier que le chat mange la souris presque sûrement.
3. Si initialement, la souris est dans le grenier et le chat dans le jardin, quelle est l'espérance de vie de la souris ? (on considèrera que chaque déplacement compte pour une heure).

Exercice 2.

On dispose d'une urne contenant 1 boule noire et $N-1$ boules blanches. On effectue des tirages sans remise dans l'urne jusqu'à l'obtention de la boule noire. Soit Y le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire.

1. Démontrer que la loi de probabilité de Y (c'est-à- dire $P(Y=i)$, $i \in \{1,...,N\}$) est la loi uniforme sur l'ensemble $\{1,...,N\}$.
2. En déduire le nombre moyen de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire.

On dispose maintenant de deux urnes indiscernables, numérotées U_1, U_2. L'urne U_1 contient N boules blanches. L'autre urne, U_2, contient $N-1$ boules blanches et 1 boule noire. On cherche à discerner ces deux urnes par des tirages aléatoires dans l'une ou l'autre de ces urnes, les urnes choisies selon diverses stratégies. On note X le nombre de tirages nécessaires pour discerner les deux urnes.

1. Une première stratégie consiste à choisir une urne U au hasard, de facon uniforme, parmi U_1 et U_2. On tire alors des boules une par une dans l'urne U seulement.
   (a) Expliciter la loi de probabilité de X.
   (b) Selon cette stratégie, en moyenne, quel est le nombre de tirages nécessaires pour discerner les deux urnes?
2. Une seconde stratégie consiste à tirer une boule de chaque urne à chaque étape. La première urne est choisie aléatoirement de façon uniforme.
   (a) Expliciter la loi de probabilité de X.
   (b) Selon cette stratégie, en moyenne, quel est le nombre de tirages nécessaires pour discerner les deux urnes?
3. Quelle stratégie choisir parmi ces deux étudiées pour minimiser en moyenne le nombre de tirages nécessaires pour discerner les deux urnes?
4. Une troisième stratégie consiste à choisir aléatoirement de façon uniforme avant chaque tirage l'urne dans laquelle on va tirer une boule. On représente l'évolution du système selon cette stratégie par une chaîne de Markov sur l'ensemble $\{(p,q), p \in \{1,...,N\}, q \in \{1,...,N\}\} \cup \{F\}$:

   L'état de la chaîne (p,q) représente la situation où l'urne U_1 contient p boules blanches et l'urne U_2 contient q boules dont une noire.

   L'état F représente la situation où l'urne U_1 est vide ou l'urne U_2 ne contient plus que des boules blanches.

   On suppose $N=3$.

(a) Décrire précisément cette chaîne de Markov : dessinez le graphe sous-jacent en alignant horizontalement les états de $\{(p, q), p \in \{1, ..., 3\}, q \in \{1, ..., 3\}\}$ selon leur première composante, verticalement selon leur seconde composante, et en ajoutant l'état F. Puis ajoutez toutes les transitions et écrivez pour chaque transition sa probabilité.

(b) Justifier qu'il s'agit d'une chaîne absorbante.

(c) Pour tout état (p, q), on note $E_{p,q}$ le temps moyen d'arrivée en l'état F en partant de l'état (p, q). Donner dans l'ordre les valeurs de :

i. $E_{1,1}$,

ii. $E_{1,2}$ et $E_{2,1}$.

iii. $E_{2,2}$,

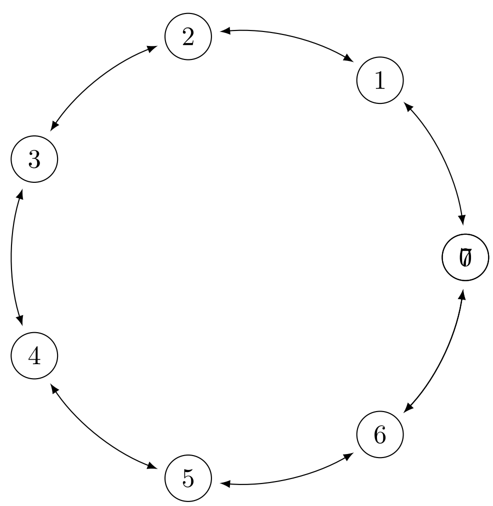
iv. $E_{3,2}$ et $E_{2,3}$,

v. $E_{3,3}$.

Selon cette stratégie, en moyenne, quel est le nombre de tirages nécessaires pour discerner les deux urnes?

(d) Quelle stratégie choisir parmi les trois étudiées pour minimiser en moyenne le nombre de tirages nécessaires pour discerner les deux urnes dans ce cas particulier?

Exercice 3. Autour d'un parc polygonal sont disposés n bars selon le shéma ci-contre (pour $n = 7$).



Un individu éméché sort du premier bar et doit rentrer chez lui, son domicile étant situé au niveau du sommet 0. Ayant perdu le sens de l'orientation, il choisit la direction qu'il va prendre en tirant une pièce à pile ou face (la pièce est supposée équilibrée). A chaque fois qu'il passe devant un bar, il s'arrête pour boire un verre puis tire à nouveau la direction qu'il va prendre à pile ou face. Quand il passe devant chez lui, il reconnaît sa maison et rentre chez lui.

1. Justifier qu'il va rentrer chez lui presque sûrement.

2. Ecrire le système d'équations qui permet de calculer le temps moyen pour rentrer chez lui.

3. Le résoudre pour $n = 6$ et $n = 7$ (essayez d'utiliser les symétries), puis dans le cas général.

Exercice 4.

Soit λ un réel > 0. Soient (X_n) une suite de variables aléatoires telles que, pour tout n, la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale de paramètre $\frac{\lambda}{n}$.

1. Soit k dans $[\![0, n]\!]$. Que vaut $P(X_n = k)$?
2. Soit k dans $\mathbb{N}$.Justifier que la suite $(P(X_n = k))_{n \geq k}$ converge et déterminer sa limite. Que conclure ?

Exercice 5.

On dispose d'une urne contenant N boules noires et blanches. On note p la proportion de boules blanches dans l'urne. On effectue n tirages sans remise dans l'urne : Soit $Y_n^{(N)}$ le nombre de boules blanches obtenues.

1. Soit k dans $[\![0, n]\!]$. Que vaut $P(Y_n^{(N)} = k)$? *la loi de* $Y_n^{(N)}$ *est appelée loi hypergéométrique de paramètres* (N, p, n).
2. Soit k dans $[\![0, n]\!]$. Justifier que la suite $(P(Y_n^{(N)} = k))_{N \geq n}$ converge lorsque N tend vers $+\infty$ et déterminer sa limite. Que conclure ?

Exercice 6.

Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Soient p, q dans $]0, 1[$ tels que $p + q = 1$,

$$\forall n, p(X_n = 1) = p \text{ et } p(X_n = -1) = q.$$

On suppose $p \neq q$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Exprimer $P(S_n = 0)$.
2. Justifier que la série $\sum P(S_n = 0)$ est convergente.
3. En déduire que la probabilité que $S_n = 0$ pour une infinité de n vaut 0.
4. Quelle convergence $(\frac{S_n}{n})$ fournit la loi forte des grands nombres ?