**Exercice 1 :**

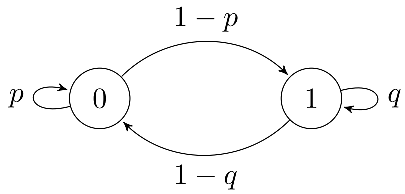
On considère la chaine de Markov sur 5 états $1, 2, 3, 4, 5$ de matrice de transition $P$ :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

1. Dessiner la chaîne de Markov.
2. Classifier les états.
3. Quelle est la probabilité en partant de 1 et en 4 étapes d'arriver en 5 ?

**Exercice 2 :**

On considère la chaîne de Markov à deux états :




avec $p$ et $q$ dans $]0, 1[$

1. Expliciter la matrice de transition de la chaîne.
2. Justifier qu'elle est apériodique et irréductible.

**Exercice 3 :**

On dispose d'une pièce biaisée qui renvoie pile avec une probabilité $p$.

1. On simule un dé avec une pièce non biaisée de la façon suivante :

   On lance une première fois la pièce : pile désigne les faces $1, 2, 3$ et face les faces $4, 5, 6$. Puis on lance la pièce deux fois : si on obtient pile,pile, alors 1 (ou 4), si on obtient pile,face, alors 2 (ou 5), si on obtient $face, pile$, alors 3 (ou 6) et si on obtient face, face on recommence. Dessiner la chaîne de Markov sous-jacente et justifier qu'on simule ainsi un dé équilibré. Quel est le nombre moyen de jets de pièces pour cette simulation d'un dé ?
2. Trouver dans le meme esprit un algorithme pour simuler une pièce non biaisée en lançant plusieurs fois la pièce biaisée. Le présenter sous forme d'une chaîne de Markov.

**Exercice 4 :**

Une image rectangulaire est formée de $m \times n$ pixels carrés, $m$ représentant le nombre de pixels en largeur et $n$ en longueur. On considère l'algorithme suivant : A chaque étape, un pixel est choisi de façon uniforme, on choisit un voisin immédiat (s'il n'est pas sur un bord, il a 8 voisins immédiats) avec une probabilité uniforme et il prend sa couleur. Démontrer qu'avec probabilité 1, l'image devient unie.

**Exercice 5 :**

Un rat se déplace dans un labyrinthe qui comporte neuf compartiments numérotés de 1 à 9. A chaque unité de temps, il change de compartiment. Lorsqu'il est dans un compartiment, il peut se déplacer dans n'importe quel compartiment adjacent avec la même probabilité. Il ne peut pas se déplacer en diagonale.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

1. Ecrire la matrice de transition.
2. La chaîne est elle irréductible, périodique, ergodique ?
3. Montrer que la loi de probabilité $u = (u_1, \ldots, u_9)$ où chaque $u_i$ est proportionnel au nombre de compartiments adjacents au compartiment $i$ est une loi de probabilité stationnaire pour la chaîne de Markov.
4. On suppose maintenant que le rat peut se reposer. Il reste dans sa case avec probabilité 1/2 et sinon, se déplace dans n'importe quel compartiment adjacent avec la même probabilité. Quelle est la matrice de transition de cette chaîne ? Démontrer qu'il s'agit d'une chaîne ergodique et et déterminer sa loi asymptotique.

**Exercice 6 :**

$N$ objets sont répartis uniformément dans des boîtes de céréales. Un collectionneur cherche à les obtenir tous et s'intéresse au nombre moyen de boîtes de céréales achetés pour obtenir toute la collection. On note $e_N$ ce nombre.

Soit $i \in [\![1, N]\!]$. On note $N_i$ le nombre de boîtes achetées après l'acquisition du $i-1$-ème objet (si $i > 0$) jusqu'à l'obtention du $i$-ème.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un nouvel objet sachant qu'on en a déjà $i - 1$.
2. En déduire la loi de $N_i$.
3. Calculer $E(N_i)$
4. En déduire une expression de $e_N$ et justifier précisément que $e_N \sim N \ln N$.

On suppose désormais que la répartition des objets n'est plus uniforme. On suppose qu'un objet est plus rare que les autres. On note $\varepsilon$ sa probabilité d'apparition. Les autres sont répartis uniformément.

5. Modéliser le problème par une chaîne de Markov.
6. Justifier que $\lim_{\varepsilon \to 0} e_n = +\infty$.

**Exercice 7 :**

Soit $\{D_n\}_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées définies sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telles que :

$$P(D_1(0,1)) = \frac{1}{2} \text{ et } P(D_1(1,0)) = \frac{1}{2}.$$

Soit $X_0$ une variable aléatoire définie sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On définit pour tout entier naturel $n \geq 1$ la vraiable $X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} D_i$.

1. Démontrer que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.
2. Est-elle irréductible ?
3. Est-elle apériodique ?

**Exercice 8 :**
On représente un modèle de diffusion de gaz de la façon suivante : On dispose de deux containers $U$ et $V$ qui contiennent initialement $l$ (resp. $m$) molécules d'un gaz. A chaque instant, une molécule choisie de façon uniforme change de container. On pose $N = l + m$, le nombre total de molécules. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n$ le nombre de molécules dans le container $U$.

1. Exprimer la probabilité $P(X_n = y | X_{n-1} = x)$.
2. Démontrer que la chaîne admet la loi binomiale $\pi(x) = \frac{1}{2^N}\begin{pmatrix} N \\ x \end{pmatrix}$ comme loi stationnaire. La chaîne admet-elle une loi limite ?

On modifie la chaîne de la façon suivante : On choisit d'abord un container de façon uniforme, puis on effectue le tirage de façon uniforme et la molécule choisie va dans le container choisi. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n$ le nombre de molécules dans le container $U$.

3. Exprimer la probabilité $P(Y_n = y | Y_{n-1} = x)$.
4. Démontrer que la chaîne a une loi limite qui est la loi binomiale $\pi(x) = \frac{1}{2^N}\begin{pmatrix} N \\ x \end{pmatrix}$.

**Exercice 9 :**
Soit $\mathcal{C}$ une chaîne de Markov à $N$ états de matrice de transition $P$. On suppose la matrice $P$ bistochastique, c'est-à-dire :

$$\forall i \in [\![1, N]\!], \sum_j p_{i,j} = \sum_j p_{j,i} = 1$$

Les sommes sur les lignes et les sommes sur les colonnes sont égales à 1.

1. Donner un sens à $\sum_j p_{j,i}$ en général.
2. On suppose que la chaîne $\mathcal{C}$ est irréductible et apériodique. Démontrer que sa loi stationnaire est la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$.

**Exercice 10 :**
Un jeu de société est formée d'un anneau de $N$ cases numérotées de 0 à $N - 1$. A chaque étape, le joueur lance un dé équilibré et avance du nombre correspondant de cases. On note $X_n$ la position du joueur à la $n$-ième étape.

1. Dessiner la chaîne de Markov (donnez par exemple la valeur 10 à $N$).
2. Quelles sont les propriétés de cette chaîne ? Justifier que la chaîne a une distribution stationnaire.
3. Déterminer sans calcul cette loi stationnaire.