Exercice 1 :

On suppose que $P : \mathbb{N} \to [0,1]$ est une loi de probabilité. Cela équivaut à la donnée d'une suite de nombres positifs $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_n p_n = 1$, avec $p_n = P(n)$.

1. Démontrer qu'il n'existe pas sur $\mathbb{N}$ une loi de probabilité qui rende le tirage d'un entier équiprobable.

2. On pose $p_n = \frac{1}{2^{n+1}}$.
   (a) Démontrer qu'on a ainsi une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.

   (b) Calculer la probabilité de l'ensemble des nombres pairs et de l'ensemble des nombres impairs. Qu'en pensez-vous ?

3. On souhaite maintenant que la loi de probabilité sur $\mathbb{N}$ satisfasse la propriété :
$$\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, P(a\mathbb{N}) = \frac{1}{a}.$$
   (a) Démontrer que si a et b sont deux entiers premiers entre eux, les événements “être multiple de a” et “être multiple de b” sont indépendants.

   (b) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Si n est un entier naturel, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des nombres premiers $\leq n$. On souhaite justifier que la suite $(\prod_{p\in\mathcal{P}_n}(1-\frac{1}{p}))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 (ce qu'on appelle un produit divergent).
      i. Rappeler pourquoi $\mathcal{P}$ est infini.

      ii. Quelques rappels d'analyse :
         A. Justifier que, pour tout entier naturel non nul N, $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} \geq \ln N$.

         B. Justifier que $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} \leq \prod_{p\in\mathcal{P}_N}(\sum_i \frac{1}{p^i})$.
         C. Soit $p \in \mathcal{P}$. Démontrer que $\sum_i \frac{1}{p^i} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p(p-1)}$.

      iii. En déduire (en utilisant $1 + u \leq e^u$) que
$$\prod_{p\in\mathcal{P}_n}(\sum_i \frac{1}{p^i}) \leq \exp(\sum_{p\in\mathcal{P}_n} \frac{1}{p} + 1).$$
      iv. En déduire que
$$\sum_{p\in\mathcal{P}_N} \frac{1}{p} \geq \ln(\ln(N)) - 1.$$
      v. Justifier que la suite $(\prod_{p\in\mathcal{P}_n}(1-\frac{1}{p}))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
   (c) En déduire qu'une telle probabilité n'existe pas.

4. On remplace alors la notion de probabilité par celle de *densité*. Si E est une partie de $\mathbb{N}$, on définit sa densité comme la limite, si elle existe, de la suite $(\frac{1}{n}|E \cap \{1, ..., n\}|)$.
   (a) Quelle est la densité de $\mathbb{N}$?
   Plus généralement de $a\mathbb{N}$, pour $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$?
   Quelle est la densité d'un ensemble fini ?

(b) Soit $E = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \ / \ \text{pgcd}(m, n) = 1\}$. On souhaite définir sa densité dans N^2 et la calculer.

On pose, pour d un entier naturel non nul, $F_d = (d\mathbb{N})^2$ et, pour tout entier naturel non nul N, $F_d^N = (d\mathbb{N})^2 \cap \{1, ..., N\}^2$.

Si E est une partie de $\mathbb{N}^2$, on définit sa densité comme la limite, si elle existe, de la suite $(\frac{1}{N^2}|E \cap \{1, ..., N\}^2|)$.

i. Démontrer que F_d a $\frac{1}{d^2}$ comme densité.

ii. On définit la fonction de Moebius sur $\mathbb{N}^*$, notée μ, par récurrence en posant :

$$\begin{cases} \mu(1) = 1 \\ \sum_{d|n} \mu(d) = 0, \quad \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Démontrer qu'elle vérifie les propriétés :

A. Si p est un nombre premier, $\mu(p) = -1$.

B. Si p est un nombre premier et si $n \geq 2$, $\mu(p^n) = 0$.

C. Si m et n sont des entiers naturels premiers entre eux, $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$.

D. En déduire pour tout entier naturel non nul n, la valeur de $\mu(n)$ en fonction de la décomposition en nombres premiers de n.

iii. En appliquant la formule du crible, démontrer que :

$$|E \cap \{1, ..., N\}^2| = \sum_{d|N} \mu(d)(|F_d \cap \{1, ..., N\}^2|).$$

iv. En déduire que la suite de terme général $\frac{1}{N^2}|E \cap \{1, ..., N\}^2| - \sum_{d|N} \frac{\mu(d)}{d^2}$ converge vers 0.

v. Démontrer que E admet $\frac{6}{\pi^2}$ comme densité.

Exercice 2 :

On définit un arbre binaire de recherche dans lequel tout noeud est numeroté (clé du noeud) tel que :

Pour un noeud de clé k, les clés du sous-arbre gauche sont strictement inférieures à k et les clés du sous-arbre droit sont supérieures ou égales à k. Un arbre de recherche à n noeuds construit aléatoirement est un arbre obtenu par insertion successive deans l'arbre vide de $\sigma(1), ..., \sigma(n)$ pour σ une permutation de $[\![1, n]\!]$ tirée aléatoirement (uniformément dans le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$).

Soit h la fonction qui a une permutation σ associe la hauteur de l'arbre binaire défini par σ.

On effectue des tirages successifs indépendants $U_1, ..., U_m, ...$ dans $\mathfrak{S}_1, ...\mathfrak{S}_m, ...$ On pose $X_i = h(U_i)$.

1. Justifier que les variables $(X_i)_i$ sont globalement indépendantes.
2. Déterminer la loi de X_1.
3. On définit la variable aléatoire R_n qui prend la clé de la racine de l'arbre associée à la permutation tirée ($R_n(\sigma) = \sigma(1)$)

(a) On définit la fonction $f_i : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_{i-1} \times \mathfrak{S}_{n-i}$ qui associe à la permutation σ le couple $(\tilde{\sigma}, \hat{\sigma})$ où $\tilde{\sigma}$ est la permutation de $[\![1, i]\!]$ en supprimant dans σ les valeurs $> i$ (sous-arbre à la gauche du noeud de clé i), et $\hat{\sigma}$ est la permutation de $[\![1, n-i]\!]$ en supprimant dans σ les valeurs $< i$ (sous-arbre à la droite u noeud de clé i) renumérotée (pour que les valeurs soient bien dans $[\![1, n-i]\!]$). En pratique, sur une permutation σ, on appelera $f_{\sigma(1)}$ (car $\sigma(1)$ est la clé de la racine). Par exemple :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, f_4(\sigma) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Justifier que :

$$(X_n | R_n = i) = (h(U_n) | R_n = i) = (1 + \max(h(\tilde{U_n}), h(\hat{U_n})) | R_n = i).$$

où $(\tilde{U_n}, \hat{U_n}) = f_i(U_n)$.

(b) En déduire que la variable $(X_n | R_n)$ a la même loi que la variable $\max(X_{i-1}, X_{n-i}) + 1$

4. On pose pour tout entier naturel n, $Y_n \leq 2^{X_n}$. Justifier que $E(Y_n) \leq \frac{4}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E(Y_i)$.
5. En utilisant l'égalité $\sum_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} i+3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+3 \\ 4 \end{pmatrix}$, montrer que $E(Y_n) \leq \frac{1}{4} \begin{pmatrix} n+3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
6. En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, en conclure que $E(X_n) = O(\ln n)$.