- Variable aléatoire de Bernoulli : X telle que $\mathrm{P}(X \in \{0,1\}) = 1$. On dit alors que $p := \mathrm{P}\{X = 1\}$ est le paramètre de X.
- Variable aléatoire géométrique de paramètre $p \in [0,1]$: pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathrm{P}\{X = n\} = (1-p)^n p$, la probabilité que n échecs indépendants d'une épreuve de Bernoulli soient suivis d'un succès. On vérifie que $\sum_{n\in\mathbb{N}}(1-p)^n p = 1$. (On "décale" parfois la définition sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors $\mathrm{P}\{X = n\} := (1-p)^{n-1}p$.)
- Variable aléatoire binomiale : X est de paramètres $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p \in [0,1]$, si pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ on a $\mathrm{P}\{X = k\} = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. On note que $\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}\{X = k\} = 1$ et que $\mathrm{P}\{X = k\}$ est la probabilité que la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes produisent k succès et $n-k$ échecs.

Exercice 1 :

Soit $f : E \to F$, démontrer que

1. $f^{-1}[F \setminus B] = E \setminus f^{-1}[B]$ pour tout $B \subseteq F$.
2. $f^{-1}[F] = E$ et $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$.
3. $f^{-1}[\cup_n B_n] = \cup_n f^{-1}[B_n]$ et $f^{-1}[\cap_n B_n] = \cap_n f^{-1}[B_n]$.

Exercice 2 :

Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes sur un même espace de probabilités à valeurs dans $\{-1,1\}$ et de mêmes lois définies par :

$$P(U = -1) = \frac{1}{3} \text{ et } P(U = 1) = \frac{2}{3}$$

Soit X et Y les variables aléatoires définies par : $X = U$ et $Y = UV$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire (X,Y) ?
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Les variables X^2 et Y^2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 :

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace de probabilité de même loi géométrique de paramètre p ($P(X = k) = p(1-p)^k$).

1. Calculer $P(Y \geq X)$. Donner sa valeur pour $p = \frac{1}{2}$.
2. Calculer $P(Y = X)$. Donner sa valeur pour $p = \frac{1}{2}$.
3. Montrer que $P(Y > X) = P(X > Y)$.

On définit les variables aléatoires U et V par

$$U = \max(X,Y) \text{ et } V = \min(X,Y)$$

4. Pour tous $u \leq v \in \mathbb{N}$ Calculer $P(U \leq u, V \geq v)$.
5. Calculer les lois de la variable aléatoire U.

Exercice 4 :

Pour avoir son diplôme, un étudiant doit réussir les examens des N cours qui sont proposés, et obtenir ainsi les N unités de valeur correspondantes. On suppose que l'étudiant a une probabilité $p \in]0,1[$ de réussir chacun des examens (toutes les tentatives sont supposées indépendantes). D'année en année, l'étudiant peut reporter les unités de valeurs obtenues, et il ne passe alors que les examens qu'il n'a pas réussis.

1. Pour $1 \leq i \leq N$, notons G_i le nombre d'essais nécessaires pour réussir l'examen du i-ième cours. Quelle est la loi de G_i ?
2. On note X_n le nombre total d'unités obtenues pendant les n premières années (si $X_n = N$, alors $X_m = N$ pour $m \geq n$). Quelle est la loi de X_n ?
3. On suppose que l'étudiant ne peut passer les examens qu'au plus pendant 5 ans.
   (a) Quelle est la probabilité que l'étudiant n'obtienne pas son diplôme ?
   (b) Combien d'examens l'étudiant passera-t-il en moyenne ?

Exercice 5 :
Une information est transmise dans une population. Chaque individu transmet la bonne information avec probabilité p, la négation de l'information est transmise avec probabilité $1-p$. Soit p_n la probabilité que l'information soit correcte après n répétitions.

1. Calculer la valeur p_n en fonction de p et de n.
2. Calculer $\lim_n p_n$. Conclure.

Exercice 6 :
On suppose que $P : \mathbb{N} \to [0,1]$ est une loi de probabilité. Cela équivaut à la donnée d'une suite de nombres positifs $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_n p_n = 1$, avec $p_n = P(n)$.

1. Démontrer qu'il n'existe pas sur $\mathbb{N}$ une loi de probabilité qui rende le tirage d'un entier équiprobable.
2. On pose $p_n = \frac{1}{2^{n+1}}$.
   (a) Démontrer qu'on a ainsi une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.
   (b) Calculer la probabilité de l'ensemble des nombres pairs et de l'ensemble des nombres impairs. Qu'en pensez-vous ?
3. On souhaite maintenant que la loi de probabilité sur $\mathbb{N}$ satisfasse la propriété :

$$\forall a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, P(a\mathbb{N}) = \frac{1}{a}.$$

   Démontrer que si a et b sont deux entiers premiers entre eux, les événements "être multiple de a" et "être multiple de b" sont indépendants.

Exercice 7 :
Un fumeur a deux boîtes d'allumettes de même contenance dans chacune de ses deux poches. Lorsqu'il a besoin d'une allumette, il choisit de façon équiprobable une de ses poches et prend l'allumette dans la boîte correspondante. On note n le nombre d'allumettes initialement dans chaque boîte.

1. Soit r entre 0 et n. On note p_r la probabilité que lorsque pour la première fois le fumeur constate qu'une boîte est vide, l'autre contienne exactement r allumettes.Calculer p_r.
2. Pour r entre 0 et n, on note q_r la probabilité qu'une boîte soit vidée, alors que l'autre contient exactement r allumettes. Calculer la probabilité q_r.
3. Quelle est la probabilité q pour que la première boîte vidée ne soit pas la première boîte que le fumeur constate vide.

Exercice 8 :
Nous allons considérer un jeu de dés avec 4 dés à 20 faces chacun. Ces dés sont supposés non truqués. À chaque lancer, un nombre de points est attribué :

- Si tous les dés ont un résultat différent le nombre de points est nul.
- S'il existe une paire, un triplet ou un carré du nombre a, le nombre de points est égal à a.
- S'il existe deux paires du nombre a et b ($a \neq b$), le nombre de points est égal à $a + b$.

1. Quel est l'espace de probabilité ? Quelle est la distribution de probabilité ?
2. Quelle est la probabilité de faire un score nul ?
3. Soit a entre 1 et 20. Déterminer la probabilité d'avoir exactement k nombres a parmi les dés lancés.
4. Soit X_a la variable aléatoire valant 1 si a apparait au moins deux fois dans les lancers et 0 sinon. Déterminer la loi suivie par X_a et exprimer le gain du jeu à l'aide de ces variables. Calculer l'espérance du gain.
5. Quelle est la probabilité de faire exactement 8 points ?
6. On autorise maintenant de relancer une fois entre 0 et 4 dés. Quelle est la meilleure stratégie après avoir obtenu $11 - 7 - 2 - 2$?
7. Quelle est la meilleure stratégie après avoir obtenu 4 nombre différents ?

Exercice 9 :

On joue à pile (obtenu avec probabilité p) ou face (obtenu avec probabilité $q = 1-p$) jusqu'à avoir obtenu n fois Pile. On considére la variable aléatoire X qui compte le nombre de jets nécessaires.

1. Déterminer la loi de X.
2. En déduire l'identité
$$\sum_{k \geqslant n} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} = 1.$$
On retrouve ainsi un cas particulier de la formule du binôme généralisée.

Exercice 10 :

On vous propose de choisir un unique cadeau parmi n. Les cadeaux vous sont proposés un par un dans un ordre aléatoire. Lorsque l'on vous propose un cadeau, vous pouvez l'accepter et partir avec ou le refuser en attente de connaître le suivant. Les valeurs des cadeaux sont toutes distinctes (on les représente par les nombres $y_1 < \cdots < y_n$) et vous souhaitez bien entendu choisir celui de plus grande valeur, c'est-à-dire y_n. Mais vous ne connaissez pas ces valeurs. On note $(A_k)_{k=1}^n$ l'événement "le choix se fait sur le cadeau présenté à la k-ième étape" et B l'événement "Le meilleur cadeau a été choisi".

1. On fixe un nombre j. On décide de ne pas prendre les j premiers lots. Après avoir vu ces j premiers on décide de garder le premier lot présenté d'une valeur supérieure au maximum des j premiers. Calculer selon cette stratégie $P(A_k)$.
2. Calculer $P(B)$ en suivant cette stratégie ?
3. Quelle est le comportement asymptotique de cette stratégie pour $n \to +\infty$?