Exercice 1. Coefficients binomiaux

Simplifier :

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$$

Comme $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$, on peut réecrire

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{2n}{n}$$

par l'identité de Van der Monde.

Exercice 2. Formule du crible

Quel est le nombre d'applications f injectives de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,2n]\!]$ telles que $\forall x\in[\![1,2n]\!], f(x)\notin\{x,2n-x+1\}$?

Soit F l'ensemble des applications injectives de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,2n]\!]$.

$$|F|=2n*(2n-1)*\cdots*n+1=\frac{(2n)!}{n!}$$

Soit x dans $[\![1,2n]\!]$. On note E_x l'ensemble des applications injectives de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,2n]\!]$ telles que $f(x)\in\{x,2n-x+1\}$. Comme $x\neq 2n-x+1$,

$$|E_x|=2*(2n-1)*\cdots*n+1=\frac{2(2n-1)!}{n!}$$

Si $x_1,...,x_p$ sont p éléments distincts de $[\![1,2n]\!]$, $E_{x_1}\cap E_{x_2}\cap\cdots\cap E_{x_p}$ est l'ensemble des applications injectives de $[\![1,n]\!]$. dans $[\![1,2n]\!]$telles que $f(x_i)\in\{x_i,2n-x_i+1\}$, $\forall i\in[\![1,p]\!]$. Les ensembles $\{x_i,2n-x_i+1\}$ sont disjoints deux à deux ($\{x_i,2n-x_i+1\}\cap[\![1,n]\!]=\{x_i\}$ et $\{x_i,2n-x_i+1\}\cap[\![n+1,2n]\!]=\{2n-x_i+1\}$, donc

$$|E_{x_1}\cap E_{x_2}\cap\cdots\cap E_{x_p}|=2^p*(2n-p)*\cdots*n+1=\frac{2^p(2n-p)!}{n!}$$

Par la formule d'inclusion-exclusion:

$$|\cup_{i=1}^n E_i|=\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\left(\begin{array}{c}n\\p\end{array}\right)\frac{2^p(2n-p)!}{n!}$$

Donc le nombre d'applications f injectives de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,2n]\!]$ telles que $\forall x\in[\![1,2n]\!], f(x)\notin\{x,2n-x+1\}$ est :

$$\frac{(2n)!}{n!}+\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-}\left(\begin{array}{c}n\\p\end{array}\right)\frac{2^p(2n-p)!}{n!}$$

Exercice 3. involution, point fixe

On se propose de démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas d'application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, f(f(n))=n+2017.$$

Soit f une telle application.

1. Justifier que f est injective.

   Soient n et m tels que $f(n) = f(m)$. Alors
   $n + 2017 = f(f(n)) = f(f(m)) = m + 2017$ donc $n = m$.

2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n + 2017) = f(n) + 2017$.
   On utilise l'associativité de la composition :
   $\forall n \in \mathbb{N}, f(n + 2017) = f((f \circ f)(n))) = (f \circ f)(f(n)) = f(n) + 2017$.

3. Soit π la surjection canonique de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}/2017\mathbb{Z}$ (qui envoie un élément n sur sa classe modulo 2013). Démontrer que $g = \pi \circ f$ définit par factorisation une bijection de $\mathbb{Z}/2017\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/2017\mathbb{Z}$.

   La question précédente et une récurrence démontrent que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, f(n + k2017) = f(n) + k2017$. Donc, en notant π la surjection canonique de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}/2017\mathbb{Z}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}, \pi(n) = \pi(m) \Rightarrow \pi(f(n)) = \pi(f(m))$.. ainsi, on peut définir par factorisation une application $\overline{f}$ en posant $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{f}(\pi(n)) = \pi(f(n))$, si bien que le diagramme ci-dessous commute :

   $$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{N} \\ \pi\downarrow & \searrow^{g} & \downarrow\pi \\ \mathbb{Z}/2017\mathbb{Z} & \xrightarrow[\overline{f}]{} & \mathbb{Z}/2017\mathbb{Z} \end{array}$$

   On note $\overline{f}$ cette bijection. On remarque alors que $\overline{f}$ est surjective. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}, \pi(n) = \pi(n + 2017)$ et $n + 2017 = f(f(n))$, donc $\pi(n) = \pi(f(f(n))) = \overline{f}(\pi(f(n)))$. Comme $\mathbb{Z}/2017\mathbb{Z}$ est un ensemble fini, une surjection de $\mathbb{Z}/2017\mathbb{Z}$ dans lui-même est une bijection, donc $\overline{f}$ est bijective.

4. Justifier que $\overline{f}$ admet au moins un point fixe.

   Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, f(f(n)) \equiv n[2017]$,
   $\overline{f}(\overline{f}(\pi(n))) = \overline{f}(\pi(f(n))) = \pi(f(f(n))) = \pi(n)$, donc $\overline{f}$ est involutive. Or une involution sur un ensemble de cardinal impair admet un point fixe.

Soit n_0 un entier naturel tel que $f(n_0) \equiv n_0$ modulo 2017.

5. En étudiant l'ensemble des entiers de la forme $f(n_0 + K2017)$, $K = 0, 1, ...,$ conclure.

   On sait que $f(n_0 + k2017) = n_0 + k2017, \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Or il existe un entier naturel l tel que $f(n_0) = n_0 + l2017$ ($f(n_0)$ est un entier naturel $\equiv n_0$ modulo 2017). Comme f est injective, on a obligatoirement $l = 0$, donc n_0 est un point fixe de f ce qui contredit $f(f(n_0)) = n_0 + 2017$.

Exercice 4. permutations

Soit n un entier naturel $\geqslant 1$. On note $\mathcal{S}_n$ le groupe symétrique, groupe des permutations de l'ensemble $\{1, ..., n\}$.

1. Soit (i, j) une transposition dans $\mathcal{S}_n$ ($i, j \in \{1, ..., n\}$ tels que $i \neq j$). Soit ϕ une permutation dans $\mathcal{S}_n$. Démontrer que $\phi(i, j)\phi^{-1}$ est la transposition $(\phi(i), \phi(j))$.

   $\phi(i, j)\phi^{-1}(\phi(i)) = \phi(i, j)(i) = \phi(j)$.
   Par symétrie, $\phi(i, j)\phi^{-1}(\phi(j)) = \phi(i)$.
   Soit $k\{1, ..., n\} \setminus \{\phi(i), \phi(j)\}$. Alors $\exists! l \in \{1, ..., n\}/k = \phi(l)$ et par injectivité de ϕ, $l \notin \{i, j\}$, donc $(i, j)(l) = l$. Donc,
   $\phi(i, j)\phi^{-1}(k) = \phi(i, j)\phi^{-1}(\phi(l))\phi(i, j)(l) = \phi(l) = k$.

On note σ le n-cycle $(1, 2, ..., n)$ et τ le $n-1$-cycle $(1, ..., n-1)$.

2. Quelle est la permutation τ^{-1} ?
   La permutation τ^{-1} est le $n-1$-cycle $(n-1, n-2, ..., 1)$.

3. Quelle est la permutation $\tau^{-1} \circ \sigma$?
   oit $i \in \{1, ..., n-2\}$, $\tau^{-1} \circ \sigma(i) = \tau^{-1}(i+1) = i$.
   $\tau^{-1} \circ \sigma(n-1) = \tau^{-1}(n) = n$.
   $\tau^{-1} \circ \sigma(n) = \tau^{-1}(1) = n-1$.
   Donc la permutation $\tau^{-1} \circ \sigma$ est la transposition $(n-1, n)$.

4. Démontrer que σ et τ engendrent $\mathcal{S}_n$.

   Soit $i \in \{1, ..., n-2\}$, $\tau^{-1} \circ \sigma(i) = \tau^{-1}(i+1) = i$.
   $\tau^{-1} \circ \sigma(n-1) = \tau^{-1}(n) = n$.
   $\tau^{-1} \circ \sigma(n) = \tau^{-1}(1) = n-1$.
   Donc la permutation $\tau^{-1} \circ \sigma$ est la transposition $(n-1, n)$.

5. Soit H le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ engendré par σ et τ ($H =< \tau, \sigma >$). Alors H contient la transposition $(n-1, n) = \tau^{-1}\sigma$. On peut reconnaître alors en $\{(n, n-1), (n, n-1, ..., 1) = \sigma^{-1}$ une partie génératrice classique de $\mathcal{S}_n$ à la numérotation près. Sinon, on utilise la première question. $\tau^i(n, n-1)\tau^{-i} = (\tau^i(n), \tau^i(n-1)) = (n, i)$ $\forall i \in \{1, ...n-1\}$. On sait que cette famille de transpositions est génératrice.

Exercice 5. Opération, équation aux classes, points fixes

Soit p un nombre premier.

1. Soit S un ensemble fini. Soit f une application de S dans S telle que $f \neq Id$ et $f^{(p)} = Id$ ($f^{(p)}$ désigne f composée p fois). Justifier que $|S|$ est congru modulo p au cardinal de l'ensemble des points fixes de f.

   Une telle application est une bijection de S. Le sous-groupe de $\mathfrak{S}(S)$ engendré par f opère sur S et il est d'ordre p premier. Donc les orbites de cette opération sont de cardinal 1 (une par point fixe) ou de cardinal p. L'équation aux classes modulo p assure donc que $|S|$ est congru modulo p au cardinal de l'ensemble des points fixes de f.

2. Soit N un entier naturel non nul. On effectue la division euclidienne de N par p : $N = pn + r$ avec $0 \leq r < p$. On considère l'ensemble T des tableaux à N cases, les cases étant réparties sur p lignes et n colonnes et une $n+1$-colonne ayant uniquement r cases, chaque case pouvant contenir un 0 ou un 1.

0	1	1	0	
0	0	0	0	0
1	1	1	0	1
0	1	1	1	1
0	1	0	0	

Figure 1: Un exemple de tableau pour $N = 23, p = 5, n = 4, r = 3$

Soit M un entier tel que $1 \leq M \leq N$. Dans T, on considère le sous-ensemble S des tableaux ayant M cases contenant un 1 , les autres contenant un 0. Dans la figure ci dessus, $M = 11$.

(a) Quel est le cardinal de S ?

$$\binom{N}{M}$$

(b) Soit f l'application qui permute circulairement les p lignes d'un tableau de S sans modifier la $n+1$-ième colonne. En utilisant f, justifier la congruence :

$$\binom{N}{M} \equiv \binom{n}{m}\binom{r}{q}\ [p]$$

où l'entier naturel m est le quotient dela division euclidienne de M par p : $M = pm + q$ avec $0 \leq q < p$.

Une telle permutation est d'ordre p. Cherchons ses points fixes: Un tableau T est fixe si ses p lignes (indépendamment de la dernière colonne) sont toutes identiques. Un tel tableau peut -être construit par le choix d'une ligne qui sera alors reportée identiquement sur les p lignes et le choix de la dernière colonne. Si la ligne en question comporte u 1 et le dernière colonne v 1 on a $up + v$ 1 dans ce tableau. Donc $M = up + v$ et comme $0 \leq v \leq r < p$, ceci est la division euclidienne de M par p, ce qui impose $u = m$ et $v = q$.
Si $q > p$, il n'est pas possible de remplir la $n+1$-ième colonne avec q 1, il n'y a donc aucun point fixe. Si $q \leq p$, on a $\binom{n}{m}$ choix pour la ligne et $\binom{r}{q}$ pour la $n+1$-ième colonne, soit $\binom{n}{m}\binom{r}{q}$, on applique alors la question précédente.

(c) Calculer $\binom{2018}{79}$ modulo 11.
$2018 = 11.183 + 5$, $79 = 11.7 + 2$, $183 = 11.16 + 7$, $7 = 0.11 + 7$ donc avec deux aplications de la question précédente :

$$\binom{2018}{79} \equiv \binom{183}{7}\binom{5}{2} \equiv \binom{18}{0}\binom{7}{7}\binom{5}{2} \equiv 10 \quad [11]$$

Exercice 6. Séries formelles

On se déplace sur $\mathbb{N}^2$ en partant d'un point $(0,0)$ et en effectuant une suite finie de déplacements élémentaires. Les déplacements élémentaires sont de trois types : soit un pas à l'est (on passe du point (x,y) au point $(x+1,y)$) noté $\rightarrow$, soit un pas vers le nord est (on passe du point (x,y) au point $(x+1,y+1)$) noté $\nearrow$, soit un pas vers le sud est (on passe du point (x,y) au point $(x+1,y-1)$) noté $\searrow$. **Tous les chemins considérés sont dans le quart de plan $\mathbb{N}^2$. Ils ne traversent pas l'axe Ox.**
Si n est un entier naturel, on note M_n le nombre de chemins menant du point $(0,0)$ au point $(n,0)$.

J'appelle dans la suite chemin ad-hoc un chemin dans $\mathbb{N}^2$ qui n'utilisent que les pas élémentaires ci-dessus.

1. On pose $M_0 = 1$. Déterminer M_1 et M_2.

$M_1 = 1$: $\rightarrow$.

$M_2 = 2$: $\rightarrow\rightarrow$ et $\nearrow\searrow$.

2. Démontrer la relation de récurrence :

$$M_n = M_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M_{n-k-2} M_k$$

On pourra partitionner l'ensembles de ces chemins selon le dernier point rencontré par le chemin sur l'axe 0x (autre que l'origine).

Soit $(k, 0)$ l'avant dernier point rencontré par le chemin sur l'axe 0x (autre que $(0, n)$).

Alors le chemin ad-hoc entre $(k, 0)$ et $(n, 0)$, ne rencontre pas l'axe sauf à ses extremités. Si $k = n-1$, il est de la forme $\rightarrow$. Si $k < n-1$, il commence par $\nearrow$, finit par $\searrow$, et entre les points $(k+1, 1)$ et $(n-1, 1)$ il reste sur des points d'ordonnées ≥ 1. En le translatant par $(-1-k, -1)$ il définit donc un chemin ad-hoc de $(0, 0)$ et $(n-k-2, 0)$ qui reste au dessus de l'axe 0x. Réciproquement un tel chemin translaté de $(k+1, 1)$ définit un chemin ad-hoc les points $(k+1, 1)$ et $(n-1, 1)$ ne passant que par des points d'ordonnées ≥ 1. On a donc ainsi une bijection entre les chemins ad-hoc entre $(0, 0)$ et $(n-k-2, 0)$ ne rencontrant pas l'axe sauf aux extremités et l'ensemble des chemins ad-hoc de $(0, 0)$ à $(n-k-2, 0)$, et donc M_{n-k-2} tels chemins.

Donc $M_n = M_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M_{n-k-2} M_k$.

3. Soit S la série formelle :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} M_n X^n$$

Démontrer que S vérifie une équation du segond degré qu'on explicitera.

On effectue le produit de Cauchy:

$$S^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} M_m M_{n-m} X^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (M_{n+2} - M_{n+1}) X^n$$

Donc $X^2 S^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} M_{n+2} X^{n+2} - X(\sum_{n=0}^{+\infty} M_{n+1} X^{n+1}) = S - X - 1 - X(S-1)$, soit

$$X^2 S^2 + (X-1)S + 1 = 0$$

En déduire une expression de S.

$\Delta = (X-1)^2 - 4X^2 = (1+X)(1-3X)$ et $S = \frac{(1-X) \pm ((1+X)(1-3X))^{1/2}}{2} = \frac{(1-X) - ((1+X)(1-3X))^{1/2}}{2X^2}$. Le signe est $-$ car S est une série formelle. On pourrait développer cette expression. Sans entrer dans les calculs, on a: $((1+X)(1-3X))^{1/2} \equiv (1 + \frac{1}{2}X)((1 - \frac{3}{2}X) \equiv 1 - X[X^2]$.

Exercice 8. Chaine de Markov On considère le graphe de sommets $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ probabilisé de la

façon suivante : En l'état i, on jette un dé équilibré i fois et on va sur l'état j, j étant le maximum des valeurs obtenues.

1. Exprimer en fonction des entiers p et j la probabilité que le maximum des valeurs obtenues en jetant p fois un dé équilibré soit inférieur ou égal à j.

   La probabilité que le maximum des valeurs obtenues en jetant p fois un dé équilibré soit inférieur ou égal à j est la probabilité que chacune des p valeurs obtenues soit inférieure ou égal à j. Comme les jets sont indépendants:

$$P(\cap_i(X_i \leq j) = \prod_i P(X_i \leq j) = \frac{j}{6}^p$$

2. Exprimer le coefficient $p_{i,j}$ de la matrice de transition P de cette chaîne de Markov en fonction de i et j.

$$\text{si } j = 1, p_{i,j} = \frac{1}{6}^i, \text{ sinon, } p_{i,j} = \frac{j}{6}^i - \frac{j-1}{6}^i.$$

3. Justifier que :

$$\forall i \in \{1,2,3,4,5,6\}, \forall j \in \{1,2,3,4,5\},\ p_{i,j} \leq p_{i,j+1}$$

   $\forall i \in [\![1,6]\!],\ \frac{1}{6}^i \leq \frac{2}{6}^i - \frac{1}{6}^i$ car $2 \leq 2^i$.
   $\forall j \in [\![2,6]\!], \forall i \in [\![1,6]\!],\ \frac{j}{6}^i - \frac{j-1}{6}^i \leq \frac{j+1}{6}^i - \frac{j}{6}^i$ par convexité de la fonction $(x \mapsto x^i)$ sur $[0,1]$.

4. Justifier que la chaîne de Markov admet une unique loi stationnaire $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$.

   La matrice a tous ses coefficients > 0 donc la chaîne est irréductible et apériodique.

5. Démontrer que $u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_6$.

   $u_j = \sum_i u_i p_{i,j} \leq \sum_i u_i p_{i,j+1} = u_{j+1}$.

6. Pour k dans $\{1,2,3,4,5,6\}$, on note N_k la variable aléatoire qui compte le nombre de passages sur l'état k, c'est-à-dire que pour tout entier n, $N_k(n) = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{X_j=k}$. La variable $\frac{1}{n}N_k(n)$ représente ainsi la fréquence des passages sur l'état k.

   (a) Exprimer $E(\mathbf{1}_{X_j=k}|X_0 = i)$ en fonction de la matrice P^j.

   $E(\mathbf{1}_{X_j=k}|X_0 = i) = (P^j)_{i,k}$

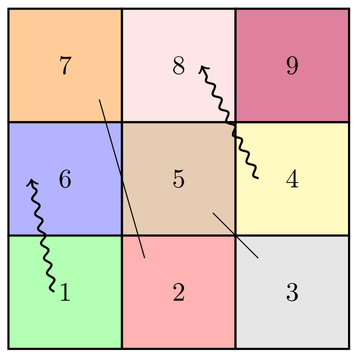
   (b) En déduire que la suite $(E(\frac{1}{n}N_k(n)|X_0 = i))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et déterminer cette limite.

   $E(\frac{1}{n}N_k(n)|X_0 = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(\mathbf{1}_{X_j=k}|X_0 = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (P^j)_{i,k}$ ce qui converge vers u_k (Convergence au sens de Cesaro : si une suite (u_n) admet une limite ℓ, la suite $(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n u_j)$ converge aussi vers ℓ);

   Pour quelle valeur de k est-elle maximale ?

   6.

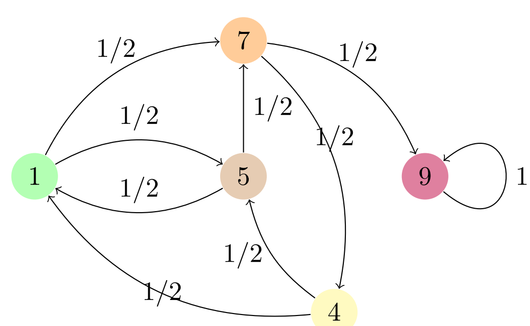
Exercice 9. Chaine de Markov Un jeu de "échelles et serpents" se joue sur un damier, supposé pour l'exercice de taille $(3,3)$ avec une pièce équilibrée. Les cases sont numérotées de 1 à 9 et les joueurs se déplacent de la case 1 à la case 9 en avancant d'une ou deux cases selon que la pièce tombe sur pile ou face respectivement. Certaines cases sont reliées par une échelle ou par un serpent. Lorsqu'un joueur arrive sur une case au pied d'une échelle, il monte l'échelle directement. Lorsqu'un joueur arrive sur une case sur la tête du serpent il glisse jusqu'à la case qui contient la queue du serpent. Dans ce jeu, il y a une échelle qui monte de la case 2 à la case 7, une échelle qui monte de la case 3 à la case 5, un serpent dont la queue est sur la case 1 et la tête sur la case 6 et un serpent dont la queue est sur la case 4 et la tête sur la case 8.



Un joueur démarre sur la case 1 et déplace son pion selon d'une ou deux cases par jet de pièce jusqu'à la case 9, le jeu étant alors terminé.

1. Modéliser le jeu d'un joueur par une chaîne de Markov à 5 états. Expliquer votre démarche. Dessiner la chaîne de Markov (on expliquera précisément les choix faits pour numéroter les états).

   On peut prendre comme ensemble d'états : $\{1,4,5,7,9\}$. En effet, quand on arrive sur la case 2 (respectivement $3,6,8$), on part immédiatement dans la case 7 (respectivement $5,1,4,8$), ces cases sont donc inutiles.



2. Ecrire la matrice de transition.

   Dans l'ordre $1,4,5,7,9$, la matrice est alors

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Justifier que le joueur peut terminer une partie presque sûrement.

   La chaîne est absorbante avec 9 comme état absorbant donc toute partie se termine presque sûrement.

4. Calculer le temps moyen d'une partie.

   On note T_i le temps moyen pour finir la partie en partant de l'état i, $i \in \{1, 4, 5, 7, 9\}$. On a alors :

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   On applique la méthode du pivot:
   $\begin{pmatrix} T_1 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_7 \end{pmatrix} = (7, 8, 7, 5).$
   Le temps moyen d'une partie est 6.

5. On suppose maintenant que deux joueurs jouent alternativement jusqu'à qu'un des deux joueurs atteigne la case 9. Expliquer comment modéliser une partie : décrire la chaîne de Markov utilisée (espace d'états, transitions).
   Justifier que la partie termine presque sûrement et proposer une majoration du temps moyen d'une partie
   On peut représenter les états possibles de la partie par $\{1, 4, 5, 7, 9\}^2$, un triplet (i, j, b) représente le fait que le premier joueur (celui qui a commencé) est sur la case i alors que le suivant est sur la case j et que c'est le tour du joueur b . Les transitions sont alors de la forme $(i, j, 1) \to (i', j, 2)$ lorsque le premier joueur joue en allant de la case i à la case i' et de la forme $(i, j, 2) \to (i, j', 1)$ lorsque le second joueur joue en allant de la case j à la case j'. La distribution initiale est la mesure de Dirac sur l'état $(1, 1, 1)$. L'ensemble dse états récurrents est $\{(i, j, b) | i = 9 \text{ ou} |; j = 9\}$; Il est accessible depuis tout état donc la partie termine presque sûrement.

   Si on note T_1 le nombre de pas du premier joueur et T_2 le nombre de pas du second joueur s'ils poursuivent la partie indépendamment l'un de l'autre avec les mêmes tirages, la durée de la partie est la variable $2\min(T_1, T_2)$. Donc la durée moyenne de la partie vérifie :

$$E(2\min(T_1, T_2)) \leq E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2) = 14.$$

   est une majoration.