Exercice 1.. Un jeu télévisé se déroule de la façon suivante.

- Une première question est posée au candidat. Si sa réponse est fausse, il a perdu et le jeu s'arrête.Mais s'il répond juste, il gagne 50 euros ou le droit de continuer le jeu.
- S'il décide de continuer, il doit répondre à une deuxième question. Si sa réponse est fausse, il a tout perdu, mais s'il répond juste, il gagne 100 euros ou le droit de continuer le jeu.
- S'il décide de continuer, il doit répondre à une troisième question. Si sa réponse est fausse, il part avec 50 euros, mais s'il répond juste, il gagne 300 euros ou le droit de continuer le jeu.
- S'il décide de continuer, il doit répondre à une quatrième question. Si sa réponse est fausse, il part avec 40 euros, mais s'il répond juste, il gagne 1000 euros ou le droit de continuer le jeu.
- S'il décide de continuer, il doit répondre à une cinquième question. Si sa réponse est fausse, il part avec 30 euros, mais s'il répond juste, il gagne 5000 euros ou le droit de continuer le jeu.
- S'il décide de continuer, il doit répondre à une sixième question. Si sa réponse est fausse, il part avec 20 euros, mais s'il répond juste, il gagne 60000 euros ou le droit de continuer le jeu.

Les questions sont de plus en plus difficiles. On estime à $\frac{2}{3}$ (respectivement $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$) la probabilité que le candidat donne la bonne réponse à la première (respectivement deuxième, troisième, quatrième, cinquième, sixième) question.

1. Le candidat redoute l'humiliation de ne pas savoir répondre à une question. Quelle stratégie le candidat doit-il adopter pour maximiser la probabilité de gagner ?
   La probabilité de donner la bonne réponse aux i premières questions est le produit des probabilités de bonne réponse à chacune de ces questions, c'est donc ecroissant en i. Elle est maximale si le candidat s'arrête après la première question.

2. Quelle stratégie le candidat doit-il adopter pour maximiser son espérance de gain?

   On note $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6})$, $(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6) = (50, 100, 300, 1000, 5000, 60000)$, $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6) = (0, 0, 50, 40, 30, 20)$.
   Soit s_i la stratégie de partir après la i-ème question si on répond juste aux i premières questions, $i \in [\![1, 6]\!]$. L'espérance de gain pour la stratégie s_i est :

$$E_1 = p_1 g_1, E_2 = p_1 p_2 g_2, \text{ et } \forall i \geq 3, E_i = (\prod_{j=1}^{i} p_j g_i + \sum_{j=3}^{i} (\prod_{k=1}^{j-1} p_j)(1 - p_j) r_j.$$

   soit numériquement :

$$(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6) \sim (33.333, 33.333, 44.444, 31.1111, 28.444, 55.648).$$

   Pour maximiser son espérance de gain, le candidat doit poursuivre le jeu jusqu'au bout.

Exercice 2.. Une roulette de casino est formée de 36 cases alternativement rouges et noires et d'une case blanche dont on ne tiendra pas compte ici. Selon qu'on tombe sur une case rouge ou noire, on double sa mise (avec probabilité $\frac{18}{37}$) ou on perd sa mise (avec probabilité $\frac{19}{37}$).

1. Un joueur arrive avec N_0 euros. Il peut donc commencer par miser une somme qui varie de 1 à N_0 euros. Soit $N > N_0$. Le joueur décide de jouer dans le but de repartir avec N euros. On pourra supposer N multiple de 4.

(a) Décrire un MDP qui modélise ce problème.

On prend comme ensemble d'états $[\![0, N]\!]$. L'état n représente le fait que le joueur possède n euros. Lorsqu'il a n euros en sa possession, il peut miser j euros avec $j \in [\![1, n]\!]$. Ceci correspond à la distribution d_j :

$$n \begin{array}{ll} \nearrow & n-j, \quad \text{avec probabilité} \frac{19}{37} \\ \searrow & n+j, \quad \text{avec probabilité} \frac{18}{37} \end{array}$$

Comme il ne souhaite pas dépasser N euros, on restreint j à être $\leq N - n$. Donc $j \in [\![1, \min(n, N-n)]\!]$.

(b) Soit U_1 le vecteur de coordonnées $(p_n)_{n\in[\![0,N]\!]}$, où p_n est la probabilité maximale d'atteindre N euros lorsqu'on possède n euros avec un seul pari. Expliciter U_1 et les stratégies qui permettent d'obtenir ces probabilités maximales.

$$p_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = N \\ \frac{18}{37}, & \text{si } n \in [\![\frac{N}{2}, N-1]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $n = N$, la stratégie optimale consiste à ne pas jouer (mise de 0 euros). Pour n dans $[\![\frac{N}{2}, N-1]\!]$ la stratégie optimale consiste à miser $N - n$ euros. Pour n dans $[\![0, \frac{N}{2}]\!]$, n'importe quelle mise fournit 0.

(c) Soit U_2 le vecteur de coordonnées $(p_n^{(2)})_{n\in[\![0,N]\!]}$, où p_n est la probabilité maximale d'atteindre N euros lorsqu'on possède n euros avec deux paris. Expliciter U_2 et les stratégies qui permettent d'obtenir ces probabilités maximales.

Soit σ une stratégie (un choix de mise a_n pour chaque état n). Alors $p_n^{(2),\sigma} = \frac{18}{37}p_{n+a_n} + \frac{19}{37}p_{n-a_n}$ avec $p_{n+a_n} = 1$, si $n + a_n = N$, $p_{n+a_n} = \frac{18}{37}$, si $n + a_n \in [\![\frac{N}{2}, N-1]\!]$, et $p_{n+a_n} = 0$ sinon. Comme $n - a_n < N$, on ne peut pas avoir $p_{n-a_n} = 1$, $p_{n-a_n} = \frac{18}{37}$, si $n - a_n \in [\![\frac{N}{2}, N-1]\!]$, 0 sinon.

Soit :

- $p_{n+a_n} = 1$, si $n + a_n = N$, ce qui ne peut se produire que si $n \geq N/2$ et $a_n = N - n$. Donc $n - a_n = 2n - N$. On a alors deux cas :
  i. $2n - N \in [\![\frac{N}{2}, N-1]\!]$, soit $n \in [\![\frac{3N}{4}, N-1]\!]$: alors $p_{n-a_n} = \frac{18}{37}$. Donc $p_n^{(2),\sigma} = \frac{18}{37} + \frac{19}{37}\frac{18}{37} = \frac{1008}{1369}$.
  ii. $2n - N < \frac{N}{2}$, soit $n \in [\![\frac{N}{2}, \frac{3N}{4} - 1]\!]$: alors $p_{n-a_n} = 0$. Donc $p_n^{(2),\sigma} = \frac{18}{37}$.
- $p_{n+a_n} = \frac{18}{37}$, si $n + a_n \in [\![\frac{N}{2}, N-1]\!]$. Dans ce cas, $a_n \in [\![\frac{N}{2} - n, N-1-n]\!]$. On a alors deux cas :
  i. Si $n - a_n \in [\![\frac{N}{2}, N-1]\!]$, $p_{n-a_n} = \frac{18}{37}$ donc $p_n^{(2),\sigma} = \frac{18}{37}$.
  ii. Si $n - a_n < \frac{N}{2}$, $p_{n-a_n} = 0$, donc $p_n^{(2),\sigma} = (\frac{18}{37})^2$.
- $p_{n+a_n} = 0$, si $n + a_n \in [\![0, \frac{N}{2} - 1]\!]$. Dans ce cas, $p_{n-a_n} = 0$ et $p_n^{(2),\sigma} = 0$.

Si σ assure une probabilité maximale :

- Si $n = N$, on ne mise rien et $p_n^{(2)} = 1$.
- Si $n \in [\![\frac{3N}{4}, N-1]\!]$, on choisit a_n tel que $n + a_n = N$, de façon à avoir $p_n^{(2)} = \frac{1008}{1369}$ ($\frac{1008}{1369} > \frac{18}{37}$)

- Si $n \in [\![\frac{N}{2}, \frac{3N}{4}-1]\!]$, alors on peut chosir a_n (éventuellement nul) de façon à avoir $n-a_n \geq \frac{N}{2}$ donc $p_n^{(2)} = \frac{18}{37}$.
- Si $n \in [\![\frac{N}{4}, \frac{N}{2}-1]\!]$, $p_n^{(2)} = (\frac{18}{37})^2$.
- Si $n \in [\![0, \frac{N}{4}-1]\!]$, $p_n^{(2)} = 0$.

2. Un joueur arrive avec 150 euros. Que doit-il miser pour maximiser la probabilité d'avoir au moins 200 euros en au plus deux parties ?

   $100 \in [\![\frac{3*200}{4}, 200-1]\!]$, donc cette probabilité est de $\frac{1008}{1369}$. Il doit d'abord miser a euros tel que $150-a \geq 100$, soit $a \in [\![0, 50]\!]$ puis s'il a gagné, il dispose alors de $150+a$ euros, il mise alors b euros avec $200 = 150+a+b$ soit $b = 50-a$ (dans ce cas il peut perdre $50-a$ euros) : s'il a perdu, il ne dispose plus que de $150-a$ euros, il mise alors c euros avec $200 = 150-a+c$ soit $c = 50+a$ (dans ce cas la perte totale pourrait être $50+2a$ euros). S'il veut minimiser la perte en moyenne, elle s'élève à $\frac{18}{37}\frac{19}{37}(50-a) + \frac{19}{37}\frac{19}{37}(50+2a)$ qui se minimise pour $a = 1$ sur $35530/1369 \sim 25.953$. Mais est supérieure à $\frac{19}{37}50 \sim 25.676$ s'il ne joue qu'une fois en misant 50.

3. Ecrire un programme en python (par ex) qui permet de calculer la probabilité d'avoir au moins 200 euros en au plus n parties avec une mise de 50 euros. En déduire une estimation de la probabilité d'avoir au moins 200 euros avec une mise de 50 euros.

Exercice 3.. Vous jouez au jeu suivant : Une roue va vous donner successivement 5 chiffres (avec la loi uniforme sur $[\![0, 9]\!]$). Vous allez au fur et à mesure constituer un nombre à 5 chiffres, en choisissant la place que vous donnez au chiffre dont vous venez d'avoir la connaissance, sans modifier les places déjà octroyées et en essayant d'obtenir un nombre le plus grand possible. Par exemple, la roue vous donne un 2 vous le prenez comme chiffre des unités, puis un 7 vous le mettez sur 10^3, puis un 5 vous le mettez sur 10^2, puis un 1 vous le mettez sur 10 et enfin un 3 que vous êtes obligés désormais de mettre sur 10^4. Vous avez ainsi obtenu le nombre 37512, alors que 75321 était la meilleure combinaison possible.

1. Modéliser ce jeu par un procesus de décision Markovien

   On peut prendre comme ensemble d'états l'ensemble des u-plets $(a, b, c, d, e), (a, b, c, d, e) \in [\![-1, 9]\!]$, -1 signifiant que la place n'a pas encore été attribuée.

   De cet état, s'il reste au moins un -1, et étant donné i dans $[\![0, 9]\!]$, une action attribue à i une place.

2. On cherche une stratégie qui maximise à chaque étape du jeu la moyenne des nombres possibles.

   (a) On simplifie le jeu d'abord en ne considérant que des nombres à deux chiffres. Calculer cette moyenne à la première étape du jeu pour chacune des 2 places possibles et i dans $[\![0, 9]\!]$ le premier chiffre proposé par la roue.

   Considérons la stratégie : si $i \leq 4$, i est mis sur le chiffre des unités et si $i \leq 5$, i est mis sur le chiffre des dizaines.

   Alors les nombres qui vont sortir à l'issue des deux tours de roue sont : Soit de la forme $x+10y$ avec x et y dans $[\![0, 4]\!]$, soit de la forme $x+10y$ avec x et y dans $[\![5, 9]\!]$ soit de la forme $x+10y$ avec x dans $[\![0, 4]\!]$ et y dans $[\![5, 9]\!]$ et dans ce cas ils apparaissent avec une probabilité double.

   La moyenne des nombres obtenues est :

$$\frac{1}{100}\sum_{x=0}^{4}\sum_{y=0}^{4}(x+10y)+\frac{1}{50}\sum_{x=0}^{4}\sum_{y=5}^{10}(x+10y)+\frac{1}{100}\sum_{x=5}^{10}\sum_{y=5}^{4}10(x+10y)=\frac{243}{4}$$

Une autre stratégie va mettre un ensemble de chiffres I sur le chiffre des unités et son complémentaire J sur le chiffre des dizaines.

La moyenne des nombres obtenues est :

$$\begin{aligned}
E^{\pi} &= \tfrac{1}{100}\textstyle\sum_{x\in I}\sum_{y\in I}(x+10y)+\tfrac{1}{50}\sum_{x\in I}\sum_{y\in J}^{10}(x+10y)+\tfrac{1}{100}\sum_{x\in J}\sum_{y\in J}(x+10y)\\
&= \tfrac{1}{100}(|I|\sigma(I)+10|I|\sigma(I))+\tfrac{1}{50}(|J|\sigma(I)+10|I|\sigma(J))+\tfrac{1}{100}(|J|\sigma(J)+10|J|\sigma(J))\\
&= \tfrac{1}{100}(\sigma(I)(11|I|+2|J|)+\sigma(J)(20|I|+11|J|))\\
&= \tfrac{1}{100}((\sigma(I)(9|I|+20)+\sigma(J)(9|I|+110))\\
&= \tfrac{1}{100}(9*45|I|+20*45+90\sigma(J))\\
&= \tfrac{45}{100}(9|I|+20+2\sigma(J))\\
&= \tfrac{45}{100}(90-9|J|+2\sigma(J))
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $|I|+|J|=10$ et le fait que $\sigma(I)+\sigma(J)=\sum_{i=1}^{9} i=45$.

La valeur est maximale lorsque $(2\sigma(J)-9|J|)$ est maximale. Ceci se teste sur les parties J égales à $[\![u,9]\!]$ pour $u\in[\![0,9]\!]$, et on vérifie par le calcul que le maximum est atteint pour $u=5$. Ce qui correspond à la stratégie décrite ci-dessus.

(b) Calculer pour ce jeu à deux chiffres et cette stratégie optimale les moyennes des deux variables X_1 qui représente le chiffre des dizaines et X_0 qui représente le chiffre des unités

La stratégie optimale est : si $i\leq 4$, i est mis sur le chiffre des unités et si $i\leq 5$, i est mis sur le chiffre des dizaines. Alors les nombres qui vont sortir à l'issue des deux tours de roue sont :

Soit de la forme $x+10y$ avec x et y dans $[\![0,4]\!]$, soit de la forme $x+10y$ avec x et y dans $[\![5,9]\!]$ soit de la forme $x+10y$ avec x dans $[\![0,4]\!]$ et y dans $[\![5,9]\!]$.

Soit $y\geq 5$. Les nombres ayant y comme chiffre des dizaines apparaissent avec la probabilité $\frac{5}{10}\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{20}$. Soit $y\leq 4$. Les nombres ayant y comme chiffre des dizaines apparaissent avec la probabilité $\frac{1}{10}\frac{5}{10}=\frac{1}{20}$. Donc la moyenne du chiffre des dizaines avec cette stratégie est $\frac{3}{20}\sum_{y=5}^{9}y+\frac{1}{20}\sum_{y=0}^{4}y=23/4\sim 5.75$.

Les nombres ayant x comme chiffre des unités apparaissent avec la probabilité : Soit $x\leq 4$. Les nombres ayant x comme chiffre des unités apparaissent avec la probabilité $\frac{5}{10}\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{20}$. Soit $x\geq 5$. Les nombres ayant x comme chiffre des unités apparaissent avec la probabilité $\frac{1}{10}\frac{5}{10}=\frac{1}{20}$. Donc la moyenne du chiffre des unités avec cette stratégie est $\frac{1}{20}\sum_{x=5}^{9}x+\frac{3}{20}\sum_{x=0}^{4}x=13/4\sim 3.25$.

On retrouve bien entendu $230/4+13/4=243/4$ (magenta Pourquoi ?).

(c) On considère les nombres à trois chiffres. Déterminer la stratégie optimale et les moyennes sur chacune des composantes.

Supposons qu'on mette i (i entre 0 et 9) à la j-ème place (j entre 0 (chiffre des unités) et 2 (chiffre des centaines)). Puis on continue le jeu avec la stratégie optimale. Alors l'espérance des nombres obtenus est :

$$E^\pi = \begin{cases} \frac{2430}{4} + i, & \text{si } j = 0 \\ \frac{2300}{4} + 10i + \frac{13}{4}, & \text{si } j = 1 \\ 100i + \frac{243}{4} + i, & \text{si } j = 2 \end{cases}$$

Un petit programme assure que le stratégie optimale est alors : si $i \leq 3$, i est mis sur le chiffre des unités, et si $i \in [\![4,5]\!]$, i est mis sur le chiffre des dizaines et si $i \geq 6$, i est mis sur le chiffre des centaines.

Les nombres qui vont sortir à l'issue des trois tours de roue sont :

Soit de la forme $x + 10y + 100z$ avec x, y, z dans $[\![0,3]\!]$, soit de la forme $x + 10y$ avec x et y dans $[\![5,9]\!]$ soit de la forme $x + 10y$ avec x dans $[\![0,4]\!]$ et y dans $[\![5,9]\!]$.

- Moyenne du chiffre des centaines : Soit $z \geq 6$. Les nombres ayant z comme chiffre des centaines apparaissent avec la probabilité $\frac{5}{10}\frac{6}{10}\frac{1}{10} + \frac{6}{10}\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{19}{100}$. Soit $z = 5$. Les nombres ayant 5 comme chiffre des centaines apparaissent avec la probabilité $\frac{5}{10}\frac{6}{10}\frac{1}{10} + \frac{6}{10}\frac{1}{10} = \frac{9}{100}$. Soit $z = 4$. Les nombres ayant 4 comme chiffre des centaines apparaissent avec la probabilité $\frac{5}{10}\frac{6}{10}\frac{1}{10} = \frac{3}{100}$. Soit $z \leq 3$. Les nombres ayant z comme chiffre des centaines apparaissent avec la probabilité $\frac{1}{10}\frac{5}{10}\frac{6}{10} = \frac{3}{100}$.
  Donc la moyenne du chiffre des centaines avec cette stratégie est $\frac{19}{100}\sum_{z=6}^{9} x + \frac{9}{100}5 + \frac{3}{100}\sum_{x=0}^{4} x = \frac{129}{20} \sim 6.45$.
  Soit $y \leq 4$. Les nombres ayant y comme chiffre des dizaines apparaissent avec la probabilité $\frac{1}{10}\frac{5}{10} = \frac{1}{20}$. Donc la moyenne du chiffre des dizaines avec cette stratégie est $\frac{3}{20}\sum_{y=5}^{9} y + \frac{1}{20}\sum_{y=0}^{4} y = 23/4 \sim 5.75$.
- Moyenne du chiffre des dizaines : Soit $y \geq 6$. Les nombres ayant y comme chiffre des dizaines apparaissent avec la probabilité $2 * \frac{5}{10}\frac{4}{10}\frac{1}{10} + \frac{4}{10}\frac{1}{10} = \frac{8}{100}$. Soit $y = 5$. Les nombres ayant y comme chiffre des dizaines apparaissent avec la probabilité $2 * \frac{5}{10}\frac{4}{10}\frac{1}{10} + \frac{4}{10}\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{18}{100}$. Soit $y = 4$. Les nombres ayant y comme chiffre des dizaines apparaissent avec la probabilité $2 * \frac{5}{10}\frac{4}{10}\frac{1}{10} + \frac{4}{10}\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{18}{100}$. Soit $y \leq 3$. Les nombres ayant y comme chiffre des dizaines apparaissent avec la probabilité $2 * \frac{5}{10}\frac{4}{10}\frac{1}{10} + \frac{4}{10}\frac{1}{10} = \frac{8}{100}$.
  Donc la moyenne du chiffre des dizaines avec cette stratégie est $\frac{8}{100}\sum_{z=6}^{9} x + \frac{18}{100}5 + \frac{18}{100}4 + \frac{8}{100}\sum_{x=0}^{3} x = \frac{9}{2} = 4.5$.
- Moyenne du chiffre des unités (on peut utiliser les symétries avec le chiffre des centaines): Les nombres ayant x comme chiffre des unités apparaissent avec la probabilité : Soit $x \leq 3$. Les nombres ayant x comme chiffre des unités apparaissent avec la probabilité $\frac{5}{10}\frac{6}{10}\frac{1}{10} + \frac{6}{10}\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{19}{100}$. Soit $x = 4$. Les nombres ayant 4 comme chiffre des unités apparaissent avec la probabilité $\frac{5}{10}\frac{6}{10}\frac{1}{10} + \frac{6}{10}\frac{1}{10} = \frac{9}{100}$. Soit $x = 5$. Les nombres ayant 5 comme chiffre des unités apparaissent avec la probabilité $\frac{5}{10}\frac{6}{10}\frac{1}{10} = \frac{3}{100}$. Soit $x \geq 6$. Les nombres ayant x comme chiffre des unités apparaissent avec la probabilité $\frac{1}{10}\frac{5}{10}\frac{6}{10} = \frac{3}{100}$. Donc la moyenne du chiffre des unités avec cette stratégie est $\frac{19}{100}\sum_{x=0}^{3} x + \frac{9}{100}4 + \frac{3}{100}\sum_{x=5}^{9} x = \frac{51}{20} \sim 2.55$.

Les nombres ayant x comme chiffre des unités apparaissent avec la probabilité : Soit $x \leq 4$. Les nombres ayant x comme chiffre des unités apparaissent avec la probabilité $\frac{5}{10}\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$. Soit $x \geq 5$. Les nombres ayant x comme chiffre des unités apparaissent avec la probabilité $\frac{1}{10}\frac{5}{10} = \frac{1}{20}$. Donc la moyenne du chiffre des dizaines avec cette stratégie est $\frac{1}{20}\sum_{x=5}^{9} x + \frac{3}{20}\sum_{x=0}^{4} x = 13/4 \sim 3.25$.

(d) On considère les nombres à quatre chiffres. Déterminer la stratégie optimale et les moyennes sur chacune des composantes.

Supposons qu'on mette i (i entre 0 et 9) à la j-ème place (j entre 0 (chiffre des unités) et 3 (chiffre des milliers)). Puis on continue le jeu avec la stratégie optimale. Alors l'espérance des nombres obtenus est :

$$E^\pi = \begin{cases} 10(100\frac{129}{20} + 10\frac{9}{2}\frac{51}{20}) + i, & \text{si } j = 0 \\ 10(100\frac{129}{20} + 10\frac{9}{2}) + 10i + \frac{51}{20}), & \text{si } j = 1 \\ 10(100\frac{129}{20}) + 100i + 10\frac{9}{2}) + \frac{51}{20}), & \text{si } j = 2 \\ 1000i + (100\frac{129}{20} + 10\frac{9}{2}\frac{51}{20}), & \text{si } j = 3 \end{cases}$$

Un petit programme assure que le stratégie optimale est alors : si $i \leq 2$, i est mis sur le chiffre des unités, si $i \in [\![3, 4]\!]$, i est mis sur le chiffre des dizaines, si $i \in [\![5, 6]\!]$, i est mis sur le chiffre des centaines et si $i \geq 7$, i est mis sur le chiffre des milliers.

On calcule les moyennes sur chacune des composantes :

$$\frac{6915}{1000}, \frac{5285}{1000}, \frac{3715}{1000}, \frac{2085}{1000}$$

(e) En déduire le premier choix de la stratégie optimale selon la valeur de i

Si $i \leq 2$, i est mis sur le chiffre des unités : si $i = 3$, i est mis sur le chiffre des dizaines : si $i \in [\![4, 5]\!]$, i est mis sur le chiffre des centaines ; si $i = 6$, i est mis sur le chiffre des milliers et si $i \geq 7$, i est mis sur le chiffre des dizaines de milliers .

(f) Expliciter la suite de la stratégie.

Une fois qu'on a la stratégie de la position du premier chiffre, on utilise successivement les stratégies optimales décrites ci-dessus pour les nombres à quatre, trois, deux puis un chiffres.

Exercice 4.. Un robot se déplace sur une grille rectangulaires formées de $m \times n$ cases. A chaque étape, il choisit de se déplacer horizontalement ou verticalement. Le déplacement est alors soit est ou ouest (respectivement nord ou sud) avec probabilité 1/2. Lorsqu'il sort de la grille il s'arrête. Déterminer le temps maximal moyen que passe le robot sur la grille. On essaiera d'intuiter le résultat en fonction de la distance du robot aux bords du rectangle.

On peut remarquer que sur une ligne, le robot suit une marche aléatoire avec bords absorbants. On commence par étudier cette situation : Le temps moyen d'absorption en partant de x sur l'intervalle $[\![0, N]\!]$ est $x(N-x)$ (on peut se contenter de vérifier que le vecteur $V = (x(N-x))_{x \in [\![0,N]\!]}$ vérifie la bonne équation, ce qui revient à vérifier que $x(N-x) = 1 + \frac{1}{2}((x+1)(N-x-1) + (x-1)(N-x+1))$.

Dans le cas général, les mouvements verticaux et les mouvements horizontaux du robot commutent. Si le robot est dans un des coins, il se déplace le long du plus grand bord. Si le robot est sur un bord, il se déplace le long de ce bord. S'il est au milieu, il se déplace selon la plus grande longueur.