Exercice 1. Une souris se déplace entre le grenier et la cuisine. Elle sort du grenier pour aller grignoter dans la cuisine avec probabilité 1/3. Dans la cuisine, elle retourne dans le grenier avec probabilité 1. Le chat se se déplace entre le jardin et la cuisine. S'il est dans le jardin, il rentre dans la cuisine avec probabilité 1/4. S'il est dans la cuisine, il sort avec probabilité 1/2. On suppose que les déplacements du chat et de la souris sont indépendants. Si le chat et la souris se trouvent tous deux dans la cuisine, le chat mange la souris.

1. Modéliser les déplacements du chat et de la souris par une chaîne de Markov à 4 états.

   On peut représenter les mouvements du chat et de la souris par deux chaînes de Markov à deux états :

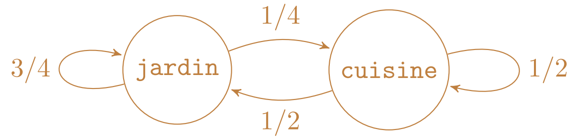
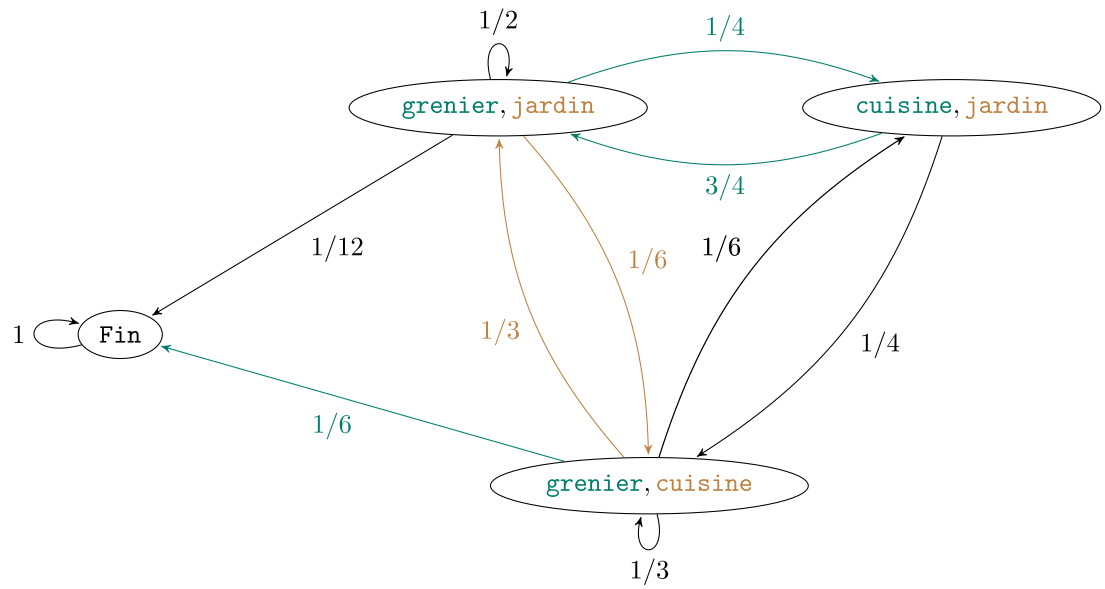


Figure 1: Mouvement du chat

Les mouvements des deux animaux étant supposés indépendants, chaque déplacement



ce qui correspond à la matrice de transition

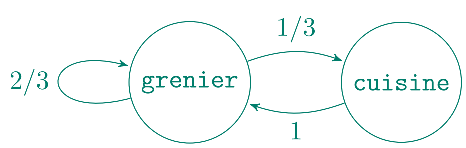


Figure 2: Mouvement de la souris

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/6 & 1/12 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Justifier que le chat mange la souris presque sûrement.

   Malheureusement pour la souris, le seul état récurrent de cette chaîne est l'état `Fin`. La chaîne est absorbante.

3. Si initialement, la souris est dans le grenier et le chat dans le jardin, quelle est l'espérance de vie de la souris ? (on considèrera que chaque déplacement compte pour une heure).

   Soit $Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/6 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ On résout le système $(I - Q)X = V$. On obtient le vecteur $\begin{pmatrix} 151/13 \\ 160/13 \\ 135/13 \end{pmatrix}$ comme solution. Donc l'espérance de vie de la souris est $151/13 \sim 11,6$, soit 11 heures et 36 minutes.

Exercice 2.

On dispose d'une urne contenant 1 boule noire et $N - 1$ boules blanches. On effectue des tirages sans remise dans l'urne jusqu'à l'obtention de la boule noire. Soit Y le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire.

1. Démontrer que la loi de probabilité de Y (c'est-à- dire $P(Y = i)$, $i \in \{1, ..., N\}$) est la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, ..., N\}$.
   Pour tout i entre 1 et N, $P(Y = i) = \frac{N-1}{N}\frac{N-2}{N-1} \cdots \frac{N-(i-1)}{N-(i-2)}\frac{1}{N-(i-1)} = \frac{1}{N}$

2. En déduire le nombre moyen de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire.
   $E(Y) = \frac{N+1}{2}$.

On dispose maintenant de deux urnes indiscernables, numérotées U_1, U_2. L'urne U_1 contient N boules blanches. L'autre urne, U_2, contient $N - 1$ boules blanches et 1 boule noire. On cherche à discerner ces deux urnes par des tirages aléatoires dans l'une ou l'autre de ces urnes, les urnes choisies selon diverses stratégies. On note X le nombre de tirages nécessaires pour discerner les deux urnes.

1. Une première stratégie consiste à choisir une urne U au hasard, de façon uniforme, parmi U_1 et U_2. On tire alors des boules une par une dans l'urne U seulement.

   (a) Expliciter la loi de probabilité de X.
   Pour tout i entre 1 et N, $P(X = i) = P(X = i|U = U_1)P(U = U_1) + P(X = i|U = U_2)P(U = U_2) = \frac{1}{2}(P(X = i|U = U_1) + P(X = i|U = U_2))$. La loi de X sachant $U = U_1$ est concentrée sur N : on ne sait pas laquelle des deux urnes elle est avant de l'avoir vidée. La loi de X sachant $U = U_2$ est la loi uniforme d'après la question 1.
   Donc pour tout i entre 1 et $N - 1$, $P(X = i) = \frac{1}{2N}$ et $P(X = N) = \frac{1}{2N} + \frac{1}{2} = \frac{N+1}{2N}$

   (b) Selon cette stratégie, en moyenne, quel est le nombre de tirages nécessaires pour discerner les deux urnes?
   $E(X) = E(X|U = U_1)P(U = U_1) + E(X|U = U_2)P(U = U_2) = \frac{1}{2}(N + \frac{N+1}{2}) = \frac{3N+1}{4}$.

2. Une seconde stratégie consiste à tirer une boule de chaque urne à chaque étape. La première urne est choisie aléatoirement de façon uniforme.

 (a) Expliciter la loi de probabilité de X.

 Soit E_1 (respectivement E_2 l'évènement "la première urne choisie est E_1" (respectivement "la première urne choisie est E_2"), de probabilité $\frac{1}{2}$.
 Sachant E_1, le tirage de la boule noire ne peut arriver que sur un tirage pair. On peut reconnaître l'urne U_1 lorsqu'elle est vide sans qu'on ait vu la boule noire $i = 2N-1$ ou l'urne 2 lorsqu'on tire la boule noire avant d'avoir vider l'urne U_1 $i = 2j, j < N$. Donc pour tout i entre 1 et $N-1$, $P(X = 2i-1|E_1) = 0$, $P(X = 2i|E_1) = \frac{1}{N}$ et $P(X = 2N-1|E_1) = \frac{1}{N}$, $P(X = 2N|E_1) = 0$.
 Sachant E_2, le tirage de la boule noire ne peut arriver que sur un tirage impair. On ne peut vider l'urne U_1 avant d'avoir tiré la boule noire de l'urne U_2. l Donc pour tout i entre 1 et N, $P(X = 2i|E_2) = 0$, $P(X = 2i-1|E_2) = \frac{1}{N}$.
 En utilisant la formule des probabilités totales, on a : Pour tout i entre 1 et $2N$, $P(X = i) = P(X = i|E_1)P(U = U_1) + P(X = i|U = U_2)P(E_2) = \frac{1}{2}(P(X = i|E_1) + P(X = i|U = U_2))$.
 Ainsi:

$$\begin{array}{lcll} P(X=2i) & = & \frac{1}{2N} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant N-1 \\ P(X=2i-1) & = & \frac{1}{2N} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant N-1 \\ P(X=2N-1) & = & \frac{1}{N} & \\ P(X=2N) & = & 0 & \end{array}$$

 (b) Selon cette stratégie, en moyenne, quel est le nombre de tirages nécessaires pour discerner les deux urnes?

$$E(X) = \sum_{i=1}^{2N} iP(X=i) = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{2N-2} i + \frac{2N-1}{N} = \frac{1}{2N}\frac{(2N-1)(2N)}{2} + \frac{2N-1}{2N} = \frac{(2N-1)(N+1)}{2N}.$$

3. Quelle stratégie choisir parmi ces deux étudiées pour minimiser en moyenne le nombre de tirages nécessaires pour discerner les deux urnes?

 $\frac{(2N-1)(N+1)}{2N} - \frac{3N+1}{4} = \frac{2(2N-1)(N+1)-(3N+1)}{4N} = \frac{(4N^2-N-3)}{4N} = \frac{((N-1)(4N-3)}{4N} > 0$ pour toute valeur de N au moins égale à 2. La première stratégie est plus efficace en moyenne, sauf si les urnes ne contiennent qu'une boule ; dans ce cas, c'est la même stratégie.

4. Une troisième stratégie consiste à choisir aléatoirement de façon uniforme avant chaque tirage l'urne dans laquelle on va tirer une boule. On représente l'évolution du système selon cette stratégie par une chaîne de Markov sur l'ensemble $\{(p,q), p \in \{1,...,N\}, q \in \{1,...,N\}\} \cup \{F\}$:

 L'état de la chaîne (p,q) représente la situation où l'urne U_1 contient p boules blanches et l'urne U_2 contient q boules dont une noire.

 L'état F représente la situation où l'urne U_1 est vide ou l'urne U_2 ne contient plus que des boules blanches.

 On suppose $N = 3$.

 (a) Décrire précisément cette chaîne de Markov : dessinez le graphe sous-jacent en alignant horizontalement les états de $\{(p,q), p \in \{1,...,3\}, q \in \{1,...,3\}\}$ selon leur première composante, verticalement selon leur seconde composante. Puis ajoutez toutes les transitions et écrivez pour chaque transition sa probabilité.

$$\begin{array}{ccccc}
(3,3) & \xrightarrow{\frac{1}{3}} & (3,2) & \xrightarrow{\frac{1}{4}} & (3,1) \\
\downarrow \frac{1}{2} & & \downarrow \frac{1}{2} & & \downarrow \frac{1}{2} \\
(2,3) & \xrightarrow{\frac{1}{3}} & (2,2) & \xrightarrow{\frac{1}{4}} & (2,1) \\
\downarrow \frac{1}{2} & & \downarrow \frac{1}{2} & & \downarrow \frac{1}{2} \\
(1,3) & \xrightarrow{\frac{1}{3}} & (1,2) & \xrightarrow{\frac{1}{4}} & (1,1)
\end{array}$$

(b) Justifier qu'il s'agit d'une chaîne absorbante. Le nombre total de boules ne peut que diminuer. Une fois sorti d'un état (p,q), on ne peut pas y retourner. Le seul état récurrent est donc F.

(c) Pour tout état (p,q), on note $E_{p,q}$ le temps moyen d'arrivée en l'état F en partant de l'état (p,q). Donner dans l'ordre les valeurs de :

i. $E_{1,1}$,
$E_{1,1} = 1$.

ii. $E_{1,2}$ et $E_{2,1}$.
$E_{1,2} = 1 + \frac{1}{4}E_{1,1} = \frac{5}{4}$.
$E_{2,1} = 1 + \frac{1}{2}E_{1,1} = \frac{3}{2}$.

iii. $E_{2,2}$,
$E_{2,2} = 1 + \frac{1}{4}E_{2,1} + \frac{1}{2}E_{1,2} = 2$

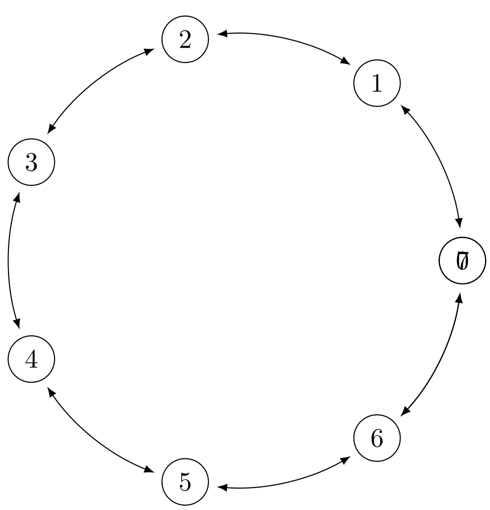
iv. $E_{3,1}$ et $E_{1,3}$,
$E_{1,3} = 1 + \frac{1}{3}E_{1,2} = \frac{17}{12}$.
$E_{3,1} = 1 + \frac{1}{2}E_{2,1} = \frac{7}{4}$.

v. $E_{3,2}$ et $E_{2,3}$,
$E_{3,2} = 1 + \frac{1}{4}E_{3,1} + \frac{1}{2}E_{2,2} = \frac{39}{16}$.
$E_{2,3} = 1 + \frac{1}{2}E_{1,3} + \frac{1}{3}E_{2,2} = \frac{57}{24} = \frac{19}{8}$.

vi. $E_{3,3}$.
$E_{3,3} = 1 + \frac{1}{2}E_{2,3} + \frac{1}{3}E_{3,2} = 1 + \frac{32}{16} = 3$.

(d) Quelle stratégie choisir parmi les trois étudiées pour minimiser en moyenne le nombre de tirages nécessaires pour discerner les deux urnes dans ce cas particulier? On obtient: Avec la première stratégie : $\frac{5}{2}$. Avec la deuxième stratégie : $\frac{10}{3}$. Avec la troisième stratégie : 3. La première est toujours meilleure dans ce cas.

Exercice 3. Autour d'un parc polygonal sont disposés n bars selon le shéma ci-contre (pour $n = 7$).



Un individu éméché sort du premier bar et doit rentrer chez lui, son domicile étant situé au niveau du sommet 0. Ayant perdu le sens de l'orientation, il choisit la direction qu'il va prendre en tirant une pièce à pile ou face (la pièce est supposée équilibrée). A chaque fois qu'il passe devant un bar, il s'arrête pour boire un verre puis tire à nouveau la direction qu'il va prendre à pile ou face. Quand il passe devant chez lui, il reconnaît sa maison et rentre chez lui.

1. Justifier qu'il va rentrer chez lui presque sûrement.
   Il s'agit d'une chaîne de Markov absorbante d'etat absorbant 0.

2. Ecrire le système d'équations qui permet de calculer le temps moyen pour rentrer chez lui.

$$\left\{\begin{array}{lcl} E_0 & = & 0 \\ E_1 & = & 1+\frac{1}{2}E_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ E_i & = & 1+\frac{1}{2}E_{i-1}+\frac{1}{2}E_{i+1} \\ \vdots & = & \vdots \\ E_{n-1} & = & 1+\frac{1}{2}E_{n-2} \end{array}\right.$$

   Par symétrie, on a : $E_i = E_{n-i}$ pour tout i dans $[\![1, n-1]\!]$.

3. Le résoudre pour $n = 6$ et $n = 7$ (essayez d'utiliser les symétries), puis dans le cas général.

   - Pour $n = 6$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} E_1 & = & 1+\frac{1}{2}E_2 \\ E_2 & = & 1+\frac{1}{2}E_1+\frac{1}{2}E_3 \\ E_3 & = & 1+\frac{1}{2}E_2+\frac{1}{2}E_2 = 1+E_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} E_1 = E_5 & = & 5 \\ E_2 = E_4 & = & 8 \\ E_3 & = & 9 \end{array}\right.$$

   - Pour $n = 7$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} E_1 & = & 1+\frac{1}{2}E_2 \\ E_2 & = & 1+\frac{1}{2}E_1+\frac{1}{2}E_3 \\ E_3 & = & 1+\frac{1}{2}E_2+\frac{1}{2}E_4 = 1+\frac{1}{2}E_2+\frac{1}{2}E_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} E_1 = E_6 & = & 6 \\ E_2 = E_5 & = & 10 \\ E_3 = E_4 & = & 12 \end{array}\right.$$

   - Dans le cas général, on intuite des calculs précédents que $E_i = i(n-i)$. Il suffit alors de le vérifier.

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], 1+\frac{1}{2}(i-1)(n-i+1)+\frac{1}{2}(i+1)(n-i-1) = i(n-i)$$

Exercice 4.

Soit λ un réel > 0. Soient (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout n, la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale de paramètre λ/n.

1. Soit k dans $[\![0, n]\!]$. Que vaut $P(X_n = k)$?

$$P(X_n = k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)(\frac{\lambda}{n})^k(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}.$$

2. Soit k dans $\mathbb{N}$. Justifier que la suite $(P(X_n = k))_{n \geq k}$ converge et déterminer sa limite.

$$\begin{array}{rcl} P(X_n = k) & = & \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (\frac{\lambda}{n})^k (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k} \\ & = & \frac{1}{k!} n(n-1)\cdots(n-k+1)(\frac{\lambda}{n})^k e^{(n-k)\ln((1-\frac{\lambda}{n})} \\ & \sim & \frac{1}{k!}\lambda^k e^{\frac{-(n-k)\lambda}{n}}) \\ & \sim & \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{array}$$

Que conclure ?

Cette suite converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 5.

On dispose d'une urne contenant N boules noires et blanches. On note p la proportion de boules blanches dans l'urne. On effectue n tirages sans remise dans l'urne : Soit $Y^{(N)}{}_n$ le nombre de boules blanches obtenues.

(a) Soit k dans $[\![0, n]\!]$. Que vaut $P(Y^{(N)}{}_n = k)$? *la loi de* $Y^{(N)}{}_n$ *est appelée loi hypergéométrique de paramètres* (N, p, n).

$$P(Y^{(N)}{}_n = k) = \frac{\begin{pmatrix} pN \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N(1-p) \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}.$$

(b) Soit k dans $[\![0, n]\!]$. Justifier que la suite $(P(Y^{(N)}{}_n = k))_{N \geq n}$ converge lorsque N tend vers $+\infty$ et déterminer sa limite.

$$\begin{array}{rcl} P(Y^{(N)}{}_n = k) & = & \frac{\begin{pmatrix} pN \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N(1-p) \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} \\ & = & \frac{(pN)!(((1-p)N)!)n!(N-n)!}{k!(pN-k)!(n-k)!(N(1-p)-n-k)!N!} \\ & = & \frac{n}{k!(n-k)!} \frac{(pN)(pN-1)\cdots(pN-k+1)\,(1-p)N((1-p)N-1)\cdots((1-p)N-1)-n+k+1)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)} \cdot \\ & \sim & \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{(pN)^k((1-p)N)^{(n-k)}}{N^n} \\ & \sim & \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{(n-k)} \end{array}$$

Que conclure ?
Cette suite converge en loi vers une loi de Bernouilli de paramètre (n, p).

Exercice 6.

Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Soient p, q dans $]0, 1[$ tels que $p + q = 1$,

$$\forall n, p(X_n = 1) = p \text{ et } p(X_n = -1) = q.$$

On suppose $p \neq q$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(a) Exprimer $P(S_n = 0)$.

Si n est impair, $P(S_n = 0) = 0$. Si n est pair, $n = 2m$, $P(S_n = 0) = \binom{n}{m} p^m q^m$.

(b) Justifier que la série $\sum P(S_n = 0)$ est convergente.
En utilisant la formule de Stirling (on peut aussi invoquer la règle de D'alembert) :

$$\binom{n}{m} p^m q^m = \frac{(2m)!}{(m!)^2}(pq)^m \sim \frac{\sqrt{4m\pi}(2m/e)^{2m}}{(\sqrt{2m\pi}(m/e)^m)^2}(pq)^m \sim \frac{(4pq)^m}{\sqrt{m\pi}}$$

Or $pq = p(1-p) < \frac{1}{4}$ puisque $p \neq q$ donc on a bien le terme d'une série convergente.

(c) En déduire que la probabilité que $S_n = 0$ pour une infinité de n vaut 0.

L'événement "il existe une infinité de n pour lesquels $S_n = 0$ " s'écrit

$$\cap_n \cup_{m \geq n} (S_m = 0) \text{ limite supérieure}$$

En effet, "il existe une infinité de n pour lesquels $S_n = 0$ " équivaut à pour tout n, il existe $m \geq n$ tel que $S_m = 0$.

Comme $P(\cup_{m \geq n}(S_m = 0)) = \sum_{m \geq n} P(S_m = 0)$, cette suite converge vers 0 comme reste d'une série convergente.

(d) Quelle convergence $(\frac{S_n}{n})_n$ fournit la loi forte des grands nombres ? retrouver ainsi le résultat de la question 3.

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n(2p - 1)$$

Donc la loi forte des grands nombres assure que $(\frac{S_n}{n})_n$ converge presque sûrement vers $2p-1 \neq 0$. Donc l'ensemble des événements pour lequel S_n est non nul à partir d'un certain rang est de probabilité 1.