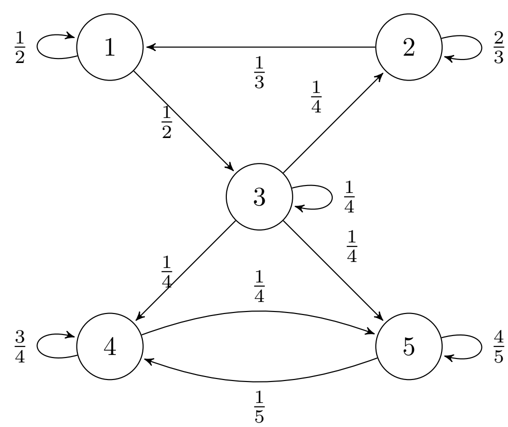
Exercice 1

On considère la chaine de Markov sur 5 états $1, 2, 3, 4, 5$ de matrice de transition P :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

1. Dessiner la chaîne de Markov.



2. Classifier les états.

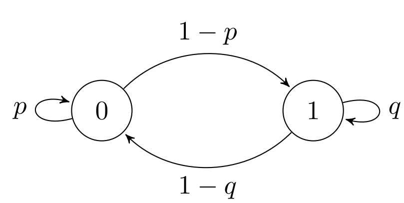
   Les états 1, 2, et 3 sont transients (ils forment une classe de communication). Les états 4 et 5 sont récurrents, ils forment une classe de récurrence apériodique.

3. Quelle est la probabilité en partant de 1 et en 4 étapes d'arriver en 5 ?

   On peut faire le produit matriciel P^4 et regarder son coefficient $(1, 5)$. On peut aussi déplier le graphe. On obtient : $\frac{920}{3200}$.

Exercice 2

On considère la chaîne de Markov à deux états :



avec p et q dans $]0, 1[$

1. Expliciter la matrice de transition de la chaîne.

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}.$$

2. Justifier qu'elle est apériodique et irréductible.

3. Exprimer : $\lim_{m\to+\infty} P(X_m = 0)$ et $\lim_{m\to+\infty} P(X_m = 1)$.

   Les valeurs propres de P sont 1 et $p+q-1$. on remarque que $p+q-1 \in]-1,1[$. On calcule une matrice de passage :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & q-1 \end{pmatrix} \text{ donc } Q^{-1} = \frac{1}{p+q-2}\begin{pmatrix} q-1 & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, } P = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p+q-1 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

$$\text{Donc, } \quad L = \lim_{k\to\infty} P^k = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = \frac{1}{2-(p+q)}\begin{pmatrix} 1-q & 1-p \\ 1-q & 1-p \end{pmatrix}.$$

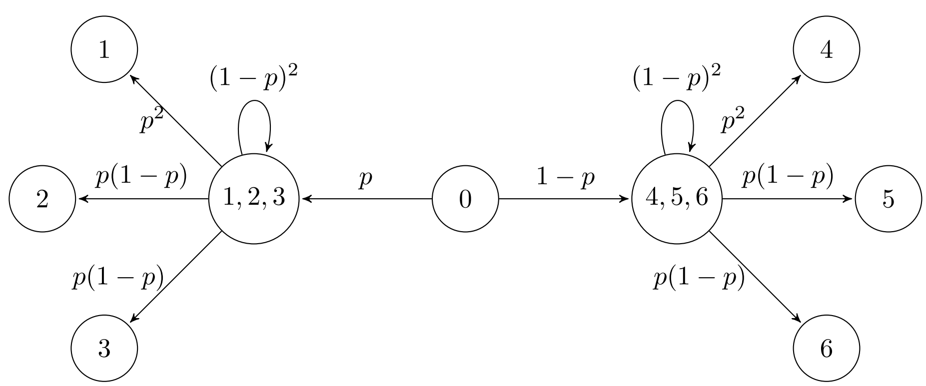
   On remarque que $(a, 1-a).L$ ne dépend pas de a (la limite ne dépend pas de la distribution initiale)

   On calcule ensuite les vecteurs propres à gauche de P pour la valeur propre 1. La loi stationnaire est $\frac{1}{2-(p+q)}(1-q, 1-p)$. On a ainsi démontré dans ce cas particulier le thm du cours par le calcul.

Exercice 3

On dispose d'une pièce biaisée qui renvoie pile avec une probabilité p.

1. On simule un dé avec une pièce non biaisée de la façon suivante : On lance une première fois la pièce : pile désigne les faces $1, 2, 3$ et face les faces $4, 5, 6$. Puis on lance la pièce deux fois : si on obtient pile,pile, alors 1 (ou 4), si on obtient pile,face, alors 2 (ou 5), si on obtient $face, pile$, alors 3 (ou 6) et si on obtient face, face on recommence. Dessiner la chaîne de Markov sous-jacente et justifier qu'on simule ainsi un dé équilibré.



   Quel est le nombre moyen de jets de pièces pour cette simulation d'un dé ?

$$\sum_i (2i+2)(p(1-p)^{2i}(p^2+2p(1-p)) + (1-p)p^{2i}(p^2+2p(1-p)).$$

2. Trouver dans le meme esprit un algorithme pour simuler une pièce non biaisée en lançant plusieurs fois la pièce biaisée. Le présenter sous forme de chaîne de Markov.

   Les événements $face, pile$ et $pile, face$ sont équiprobables. Dans un autre cas, on recommence.

Exercice 4

Une image rectangulaire est formée de $m \times n$ pixels carrés, m représentant le nombre de pixels en largeur et n en longueur. On considère l'algorithme suivant : A chaque étape, un pixel est choisi de façon uniforme, on choisit un voisin immédiat (s'il n'est pas sur un bord, il a 8 voisins immédiats) avec une probabilité uniforme et il prend sa couleur. Démontrer qu'avec probabilité 1, l'image devient unie.

Si on part d'une configuration non unie, on peut toujours trouver un chemin fini qui fait disparaître une couleur en un nombre fini d'étapes (commencer par les pixels qui ont un voisin d'une autre couleur). Par contre une configuration unie ne peut que rester unie. Donc les seuls états récurrents sont les configurations unies. On applique le thm.

Exercice 5

Soit $\{D_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées définies sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telles que :

$$P(D_1(0,1)) = \frac{1}{2} \text{ et } P(D_1(1,0)) = \frac{1}{2}.$$

Soit X_0 une variable aléatoire définie sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On définit pour tout entier naturel $n \geq 1$ la variable $X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} D_i$.

1. Démontrer que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. On l'écrit. Faire un dessin : on peut représenter l'espace d'états par une grille $[\![0, N_1]\!]^2$.
2. Est-elle irréductible ? OUi. On passe de (i, j) à (k, l) en passant par exemple de (i, j) à (k, j) par des pas $(1, 0)$ puis de (k, j) à (k, l) par des pas $(0, 1)$
3. Est-elle apériodique ? Non. Un cycle comporte au moins un nombre multiple de N de pas $(1, 0)$ et un nombre multiple de N de pas $(0, 1)$.

Exercice 6

Un rat se déplace dans un labyrinthe qui comporte neuf compartiments numérotés de 1 à 9. A chaque unité de temps, il change de compartiment. Lorsqu'il est dans un compartiment, il peut se déplacer dans n'importe quel compartiment adjacent avec la même probabilité. Il ne peut pas se déplacer en diagonale.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1. Ecrire la matrice de transition.

   a faire

2. La chaîne est elle irréductible, périodique, ergodique?

   Le rat peut faire:

   $1 \to 2 \to 3 \to 6 \to 5 \to 4 \to 7 \to 8 \to 9 \to 6 \to 5 \to 2 \to 1$ ce qui assure que la chaîne est irréductible.

   Lorsque le rat est sur un état impair, il ne peut aller que sur un état pair et réciproquement. Donc les cycles sont de longueur paires. Par ailleurs on peut toujours revenir sur un état en deux pas donc la période est exactement 2. Elle n'est donc pas ergodique.

3. Montrer que la loi de probabilité $u = (u_1, \ldots, u_9)$ où chaque u_i est proportionnel au nombre de compartiments adjacents au compartiment i est une loi de probabilité stationnaire pour la chaîne de Markov.

   On peut juste faire le calcul matriciel.

4. On suppose maintenant que le rat peut se reposer. Il reste dans sa case avec probabilité 1/2 et sinon, se déplace dans n'importe quel compartiment adjacent avec la même probabilité. Quelle est la matrice de transition de cette chaîne ? Démontrer qu'il s'agit d'une chaîne ergodique et et déterminer sa loi asymptotique. a faire : $\frac{1}{2}(P + I)$

   Cette nouvelle chaîne est toujours irréductible, mais est désormais irréductible puisqu'on a ajouté des boucles sur les états (donc des cycles de longueur 1). Elle est donc ergodique; Elle a donc une unique loi stationnaire. Or la loi décrite ci-dessus reste stationnaire, donc c'est elle.

Exercice 7

Le problème du collectionneur de coupons.
N objets sont répartis uniformément dans des boîtes de céréales. Un collectionneur cherche à les obtenir tous et s'intéresse au nombre moyen de boîtes de céréales achetés pour obtenir toute la collection. On note e_N ce nombre.

Soit $i \in [\![1, N]\!]$. On note N_i le nombre de boîtes achetées après l'acquisition du $i-1$-ème objet (si $i > 0$) jusqu'à l'obtention du i-ème.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un nouvel objet sachant qu'on en a déjà $i - 1$.

$$1 - \frac{i-1}{N}.$$

2. En déduire la loi de N_i.

$$\forall k \geq 1, \quad P(N_i = k) = (\frac{i-1}{N})^{k-1}(1 - \frac{i-1}{N}).$$

3. Calculer $E(N_i)$.

$$E(N_i) = \sum_{k=1}^{\infty} k(\frac{i-1}{N})^{k-1}(1 - \frac{i-1}{N}) = \frac{N}{N-(i-1)}$$

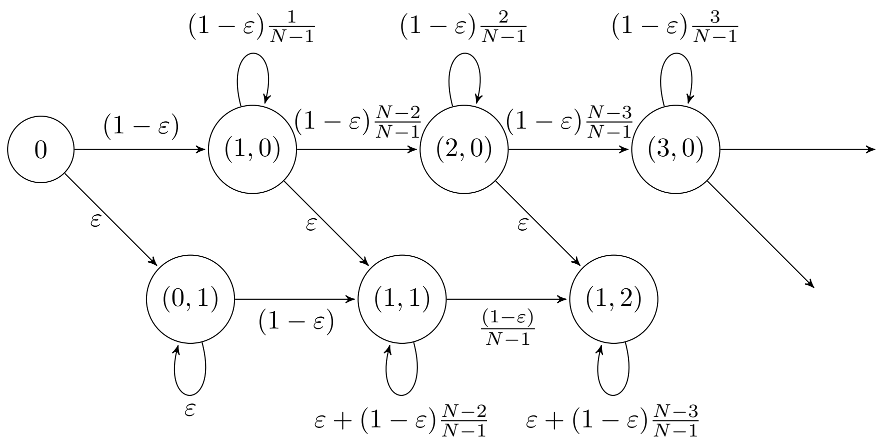
4. En déduire une expression de e_N et justifier précisément que $e_N \sim N \ln N$.

$$e_n = N(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{j}) \sim M \ln N.$$

On suppose désormais que la répartition des objets n'est plus uniforme. On suppose qu'un objet est plus rare que les autres. On note ε sa probabilité d'apparition. Les autres sont répartis uniformément.

5. Modéliser le problème par une chaîne de Markov.

   Les états sont de la forme $(i, 0)$ qui représente l'acquisition de i objets non rares et $(i, 1)$ qui représente l'acquisition de i objets non rares et de l'objet rare.



6. Justifier que $\lim_{\varepsilon\to 0} e_n = +\infty$.

   Calculer le temps moyen d'arrivée en $(1,1)$.

Exercice 8

On représente un modèle de diffusion de gaz de la façon suivante : On dispose de deux containers U et V qui contiennent initialement l (resp. m) molécules d'un gaz. A chaque instant, une molécule choisie de façon uniforme change de container. On pose $N = l + m$, le nombre total de molécules. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de molécules dans le container U.

1. Exprimer la probabilité $P(X_n = y | X_{n-1} = x)$. $P(X_n = x-1 | X_{n-1} = x) = \frac{x}{N}$, $P(X_n = x+1 | X_{n-1} = x) = \frac{N-x}{N}$ et 0 pour les autres valeurs de y.

2. Démontrer que la chaîne admet la loi binomiale $(\pi(x) = \frac{1}{2^N}\left(\begin{array}{c} N \\ x \end{array}\right)$ comme loi stationnaire.

   On fait le calcul. La chaîne admet-elle une loi limite ? Non, elle est périodique de période 2 (argument de parité).

On modifie la chaîne de la façon suivante : On choisit d'abord un container de façon uniforme, puis on effectue le tirage de façon uniforme et la molécule choisie va dans le container choisi. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note Y_n le nombre de molécules dans le container U.

3. Exprimer la probabilité $P(Y_n = y | Y_{n-1} = x)$. $P(X_n = x-1 | X_{n-1} = x) = \frac{x}{2N}$, $P(X_n = x | X_{n-1} = x) = \frac{1}{2}$, $P(X_n = x+1 | X_{n-1} = x) = \frac{N-x}{2N}$ et 0 pour les autres valeurs de y.

4. Démontrer que la chaîne a une loi limite qui est la loi binomiale $(\pi(x) = \frac{1}{2^N}\left(\begin{array}{c} N \\ x \end{array}\right)$. la chaîne ainsi ralentie est apétriodique et irréductible. Elle admet donc une unique loi stationnaire. Or la loi binomiale est stationnaire.

Exercice 9

1. $\sum_j p_{j,i}$ représente la probabilité d'entrer en l'état i.
2. Comme La chaine est bistochastique, la matrice de transition P et sa transposée sont des matrices stochastiques. Donc le vecteur de coordonnées $(1, ..., 1)$ est vecteur propre à gauche comme à droite et on déduit par unicité, que la distribution uniforme lui est colinéaire donc uniforme.

Exercice 10

Un jeu de société est formée d'un anneau de N cases numérotées de 0 à $N-1$. A chaque étape, le joueur lance un dé équilibré et avance du nombre correspondant de cases. On note X_n la position du joueur à la n-ième étape.

(a) Dessiner la chaîne de Markov (donnez par exemple la valeur 10 à N).

(b) Quelles sont les propriétés de cette chaîne ? Justifier que la chaîne a une distribution stationnaire.
La chaîne est irréductible : on peut aller de i à j en $j-i$ étapes de pas 1. Elle est apériodique: on a un cycle de longueur N (pas de 1) et un cycle de longueur $N-1$ (faire un pas de 2) donc ergodique.

(c) Déterminer sans calcul cette loi stationnaire. C'est une chaîne bistochastique donc la distribution uniforme est stationnaire.