

TD Normalisation forte, cohérence de la logique propositionnelle classique, incohérence de Russel

E. Lozes

23 mars 2009

Exercice 1 – Paradoxe de Russel

On considère la théorie des ensembles "naïve" suivante :

$$\begin{array}{l} t ::= i, \{i \mid F\} \\ F ::= t \in t', F \Rightarrow F', \perp \\ u ::= x, \lambda x.u, uv, \epsilon_1 u, \epsilon_2 u \end{array} \quad \frac{\Gamma \vdash u : t \in \{i \mid F\}}{\Gamma \vdash \epsilon_1 u : F[i := t]} \quad \frac{\Gamma \vdash u : F[i := t]}{\Gamma \vdash \epsilon_2 u : t \in \{i \mid F\}}$$

Montrer que cette théorie est incohérente (c'est le paradoxe de Russel). On pourra considérer $F(i) = \neg(i \in i)$, $A = \{i \mid F(i)\}$, et montrer \perp par une coupure sur $\neg(A \in A)$ et $\neg\neg(A \in A)$. Commentez le terme preuve ainsi obtenu.

Exercice 2 – Système $\lambda\mathcal{C}$

On considère le lambda calcul suivant dont les types et les termes sont donnés par la grammaire suivante :

$$\begin{array}{l} u, v ::= x \mid \lambda x.u \mid uv \mid \mathcal{C}u \\ F ::= \perp \mid F \Rightarrow F' \end{array}$$

Ce λ -calcul coïncide par la correspondance de Curry-Howard avec une certaine forme de prouvabilité de la logique propositionnelle classique (qui n'est pas le calcul des séquents de Gentzen). La principale nouveauté est la règle suivante :

$$\frac{\Gamma \vdash u : \neg\neg F}{\Gamma \vdash \mathcal{C}u : F} (\neg\neg E)$$

1. Rappeler les autres règles de typage et donner un λ -terme preuve de $\perp \rightarrow F$.
2. On définit les règles de réduction suivantes, ne devant pas être prises au sens contextuel, contrairement au λ -calcul pur, mais en réduction gauche :

$$\begin{array}{l} (\beta) \quad (\lambda x.u)v \rightarrow u[x := v] \\ (\mathcal{C}_L) \quad \mathcal{C}u v \rightarrow \mathcal{C}(\lambda k.u(\lambda f.k(fv))) \\ (\eta\mathcal{C}) \quad \mathcal{C}(\lambda k.ku) \rightarrow u \quad (k \notin \text{fv}(u)) \end{array}$$

Enoncer et démontrer la propriété d'autoréduction pour $\lambda\mathcal{C}$.

Exercice 3 – Codage de \wedge et \vee

On pose $F_1 \wedge F_2 \stackrel{def}{=} (F_1 \Rightarrow F_2 \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$, et $F_1 \vee F_2 \stackrel{def}{=} \neg F_1 \Rightarrow \neg F_2 \Rightarrow \perp$.

1. Donner un codage des termes $\langle u, v \rangle, \pi_1 u, \pi_2 u, \iota_1 u, \iota_2 u$, et **case** $u \left\{ \begin{array}{l} \iota_1 x \mapsto v_1 \\ \iota_2 x \mapsto v_2 \end{array} \right\}$ qui encodent les règles (admissibles) de la conjonction et la disjonction classique.
2. Donner quelques réductions de ce lambda-calcul enrichi qui sont dérivables. Quelle règle de commutation de case ne semble pas découler des règles de réduction de $\lambda\mathcal{C}$?

Exercice 4 – Normalisation forte de $\lambda\mathcal{C}$

On dit qu'un terme est *neutre* si il ne commence ni par λ ni par \mathcal{C} . On définit l'ensemble RED_F des candidats de réducibilité de type F par induction sur F :

- si F est un type de base (y compris \perp), $RED_F = SN$;
- si $F = F_1 \Rightarrow F_2$, alors $u \in RED_F$ ssi pour tout $v \in RED_{F_1}, uv \in RED_{F_2}$.

On admet par ailleurs les trois propriétés suivantes sur les ensembles RED_F (on pourra chercher à retrouver les idées de preuve).

- (CR1) si $u \in RED_F$, alors $u \in SN$,
- (CR2) si $u \in RED_F$ et $u \rightarrow u'$, alors $u' \in RED_F$,
- (CR3) si u est *neutre*, et si tout u' tel que $u \rightarrow u'$ appartient à RED_F , alors $u \in RED_F$

ainsi que la propriété suivante :

- (**) si $u[x := v] \in RED_G$ pour tout $v \in RED_F$, alors $\lambda x.u \in RED_{F \Rightarrow G}$

1. Démontrer que si $u \in RED_{\neg\neg F}$, alors $\mathcal{C}u \in RED_F$, avec les indications suivantes : pour le cas $F = F_1 \Rightarrow F_2$, on aura à considérer les réductions possibles d'un terme $\mathcal{C}uv$ qui sont : (1) $\mathcal{C}u'v$, (2) $\mathcal{C}uw'$, (3) $u'v$, (4) $\mathcal{C}(\lambda k.u(\lambda f.k(fv)))$. Pour le cas (4), on utilisera la propriété (**), et pour le cas (3), on démontrera d'abord la propriété

- (***) si $\lambda k.ku \in RED_{\neg\neg F}$ et k n'est pas libre dans u , alors $u \in RED_F$.

2. Montrer que $\lambda\mathcal{C}$ est fortement normalisant.