TD Lambda calcul : Typage, logique intuitioniste

E. Lozes

17 mars 2009

Exercice 1 – Correspondance de Curry-Howard
On considère le lambda-calcul étendu avec paire suivant :

$$M \quad ::= \quad x \mid \lambda x.M \mid MN \mid \langle M, N\rangle \mid \pi_1 M \mid \pi_2 M$$

1. Proposer un système de type simple pour ce lambda-calcul.
2. Dans la correspondance de Curry-Howard, comment s'interpréte le type de la paire dans ce calcul ?
3. Donner un terme preuve de $(a \to b \to c) \to (a \times b) \to c$, et de $((a \times b) \to c) \to a \to b \to c$, et montrer qu'ils sont inverse l'un de l'autre (on a un isomorphisme de types).

Exercice 2 – Subject reduction et expansion
On dit qu'un système de type vérifie la propriété de *subject reduction* si $M : \tau$ et $M \to N$ induisent $N : \tau$. Il vérifie la *subject expansion* si $N : \tau$ et $M \to N$ induisent $M : \tau$.

1. Rappeler la définition de $M : \tau$ dans le lambda calcul simplement typé. En choisissant les inductions adéquates, montrer que le lambda calcul simplement typé vérifie la subject reduction.
2. Rappeler les autres propriétés importantes du lambda-calcul simplement typé.
3. Montrer qu'il ne vérifie pas la subject expansion. Quelle propriété importante du typage perd-on dans un système de types qui vérifie la subject expansion ?

Exercice 3 – Logique intuitionniste
Soit VP un ensemble de variables propositionnelles ; ϕ est une formule sur VP si soit $\phi = a \in VP$, soit $\phi = \phi_1 \to \phi_2$. Une structure de Kripke est la donnée d'un triplet $(M, \leq, F)$, où M est un ensemble de *mondes*, $\leq$ est un ordre partiel sur M, et F est une fonction croissante $(M, \leq)$ dans $(\mathcal{P}(VP), \subseteq)$. On dit que $m \in M$ force ϕ (noté $m \Vdash \phi$) si soit $\phi = a \in VP$ et $a \in F(m)$, soit $\phi = \phi_1 \to \phi_2$ et pour tout $m' \geq m$, si $m' \Vdash \phi_1$, alors $m' \Vdash \phi_2$. Une formule ϕ est valide en logique intuitioniste si elle est forcée par tout monde dans toute structure de Kripke.

1. Quelle définition poser pour $m \Vdash \bot$ pour avoir $\bot \to \tau$ valide ?
2. Montrer que $\neg\neg a \to a$ et $((a \to b) \to a) \to a$ (axiome de Pierce) ne sont pas valides en logique intuitionniste.
3. On adopte un autre modèle de la logique intuitionniste. L'interprétation des variables propositionnelles est un ouvert de $\mathbb{R}$ et l'interprétation de $\tau \to \sigma$ est
$$[\![\tau \to \sigma]\!] \quad = \quad \left((\mathbb{R} - [\![\tau]\!]) \cup [\![\sigma]\!] \right)^o$$
où pour $m \subset \mathbb{R}$, m^o est l'intérieur de m. Trouver des contre-modèles des formules précédentes pour cette interprétation.

Exercice 4 – Types intersection

On définit le système de type $\mathcal{D}$ avec les règles de typage suivantes :

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau} \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \to \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\, N : \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \quad \Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash M : \sigma \wedge \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \wedge \tau}{\Gamma \vdash M : \sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \wedge \tau}{\Gamma \vdash M : \tau}$$

1. Typer les termes suivants dans le système $\mathcal{D}$: $\lambda x.xx$, $\lambda xy.x(yx)$, $(\lambda x.xx)\lambda x.x$. Comparer avec le typage sans intersection.
2. Parmi les types suivants, quels sont ceux qui sont habités :
   (a) $\big((\alpha \wedge \beta) \to \tau\big) \to \alpha \to \beta \to \tau$,
   (b) $(\alpha \to \beta \to \tau) \to (\alpha \wedge \beta) \to \tau$,
   (c) $(\tau \to \alpha \ \wedge \ \tau \to \beta) \ \to \ \tau \to (\alpha \wedge \beta)$,
   (d) $\tau \to (\alpha \wedge \beta) \ \to \ (\tau \to \alpha \ \wedge \ \tau \to \beta)$.
3. Que faut-il penser de la correspondance de Curry-Howard pour les types avec intersection ? On rappelera la sémantique de Heyting de $a \wedge b$.
4. On rajoute au système précédent un type atomique Ω et la règle :
$$\frac{}{\Gamma \vdash M : \Omega}$$
Montrer que ce système de type vérifie la subject expansion.