TD Lambda calcul : modèles, réflexifs, ou parallèle

E. Lozes

10 mars 2009

Exercice 1 – Notion de réflexif
Soit (D, G, F) un réflexif, i.e. une structure D telle que $G : [D \to D] \to D$, $F : D \to [D \to D]$, et $F \circ G = id_{[D \to D]}$. On rappelle que l'on donne alors la sémantique dénotationnelle suivante au λ-calcul :

$$\begin{array}{rcl} [\![x]\!]_\rho & = & \rho(x) \\ [\![\lambda x.M]\!]_\rho & = & G(e \mapsto [\![M]\!]_{\rho, x \mapsto e}) \\ [\![M\,N]\!]_\rho & = & F([\![M]\!]_\rho)([\![N]\!]_\rho) \end{array}$$

1. Montrer que si $M \to_\beta N$, alors $[\![M]\!]_\rho = [\![N]\!]_\rho$
2. On suppose que le réflexif D est extensionnel, c'est à dire que $G \circ F = id_D$. Montrer que si $M \to_\eta N$, alors $[\![M]\!]_\rho = [\![N]\!]_\rho$

Exercice 2 – Modèle de Engeler
On appelle modèle de Engeler basé sur les atomes A la structure $D_A = \mathcal{P}(B)$, avec :

$$B_0 = A \quad B_{n+1} = B_n \cup \{(\beta, b) : b \in B_n \wedge \beta \subseteq_{fin} B_n\} \quad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

$$F(x) = y \mapsto \{b : \exists \beta \subseteq_{fin} y.(\beta, b) \in x\} \quad G(f) = \{(\beta, b) : b \in f(\beta)\}$$

1. Calculer $[\![I]\!]_{D_A}, [\![K]\!]_{D_A}, [\![\lambda x.xx]\!]_{D_A}$
2. Vérifier que D_A est un dcpo[1] ; on note $[D_A \to D_A]$ l'ensemble des fonctions continues[2]. Vérifier que D_A est un réflexif.
3. Montrer que D_A n'est pas extensionnel.

Exercice 3 – Espaces cohérents
On appelle espace cohérent A un couple $(|A|, \frown_A)$, où $\frown_A$ est une relation binaire symétrique et réflexive sur $|A|$ (= un graphe non orienté). On note $\mathsf{Cliques}(A)$ l'ensemble des cliques (potentiellement infinies) de A. On considère trois façons de construire de nouveaux espaces cohérents à partir d'espaces cohérents pré-existants :

- L'espace des traces $!A \multimap B$ défini par

$$|!A \multimap B| = \{(\alpha, b) : \alpha \text{ est une clique finie de A}, b \in |B|\}$$

et la relation de cohérence

$$(\alpha, b) \frown_{!A \multimap B} (\alpha', b') \quad \Leftrightarrow \quad \text{si } \alpha \cup \alpha' \in \mathsf{Cliques}(A) \text{ alors} \left\{ \begin{array}{l} b \frown_B b' \\ et \\ \text{si } b = b', \text{ alors } \alpha = \alpha' \end{array} \right.$$

[1]On rappelle qu'un dcpo $(X, \leq)$ est un ensemble ordonné tel que la borne sup d'une famille dirigé existe toujours. Une famille $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X$ est dirigée si pour tout $i, j \in I$, il existe $k \in I$ tel que $x_i \leq x_k$ et $x_j \leq x_k$.

[2]On rappelle que, pour X, Y des dcpo, $f : X \to Y$ est continue si f est croissante et si $f(\sup_{i \in I} x_i) = \sup_{i \in I} f(x_i)$ pour toute famille dirigée $\{x_i\}_{i \in I}$.

– la somme $A \oplus B$ de deux espaces, définie par $|A \oplus B| = |A| \cup |B|$ et $\frown_{A\oplus B}$ égal à $\frown_A \cup \frown_B$.
– la limite : si B_n est une suite croissante (pour l'inclusion) d'espaces cohérents, alors $\lim_n B_n = B$ tel que $|B| = \bigcup_{i\geq 0} |B_i|$ et $\frown_B = \bigcup_i \frown_{B_i}$.

Etant donné un espace cohérent A, on souhaite construire un modèle du lambda-calcul en posant $B_0 = A$, puis $B_{n+1} = B_n \oplus (!B_n \multimap B_n)$, et $B_\infty = \lim_{n\geq 0} B_n$.

1. Montrer que $|!B_\infty \multimap B_\infty| \subseteq |B_\infty|$, et que la relation de cohérence induite par $\frown_{B_\infty}$ sur $|!B_\infty \multimap B_\infty|$ coïncide avec celle de $!B_\infty \multimap B_\infty$.
2. Soit $\gamma \in \mathsf{Cliques}(!A \multimap B)$. On pose
$$\hat{\gamma} : \mathsf{Cliques}(A) \to \mathsf{Cliques}(B),\ C \mapsto \{b : \exists \alpha \subseteq C, (\alpha, b) \in \gamma\}.$$
Montrer que $\hat{\gamma}$ est bien définie, et que c'est une fonction croissante et continue sur le cpo des cliques de A.
3. Montrer que $\hat{\gamma}$ est une fonction stable, c'est à dire que si $C \cup C' \in \mathsf{Cliques}(A)$, alors $\hat{\gamma}(C \cap C') = \hat{\gamma}(C) \cap \hat{\gamma}(C')$.
4. Soit $f : \mathsf{Cliques}(A) \to \mathsf{Cliques}(B)$ une fonction continue et stable. La paire $(\alpha, b) \in |!A \multimap B|$ est une *empreinte* de f si $b \in f(\alpha)$ et si $b \notin f(\alpha')$ pour tout $\alpha' \subsetneq \alpha$. Montrer que pour tout $(\alpha, b) \in |!A \multimap B|$ tels que $b \in f(\alpha)$, il existe un unique $\alpha_0 \subseteq \alpha$ tel que (α_0, b) est une empreinte de f.
5. On définit la trace de f comme l'ensemble de ses empreintes :
$$\mathrm{Tr}\ f = \quad \{(\alpha, b) : (\alpha, b) \text{ est une empreinte de f}\}$$
Montrer que $\mathrm{Tr} f \in \mathsf{Cliques}(!A \multimap B)$.
6. Montrer que $\widehat{\mathrm{Tr} f} = f$.
7. En déduire que l'espace B_∞ proposé en début d'exercice permet de définir un réflexif (non extensionnel).
8. On définit l'espace cohérent $A \otimes B$ comme $|A \otimes B| = |A| \times |B|$ et $(a, b) \frown_{A\otimes B} (a', b')$ si $a \frown_A a'$ et $b \frown b'$. On note **Bool** l'espace cohérent à 3 éléments $\{\perp, V, F\}$, où $\perp$ modélise un calcul divergent, avec la relation de cohérence $\perp \frown V, \perp \frown F$ et non $V \frown F$. Définir la fonction *ou parallèle* paror : $(\mathbf{Bool} \otimes \mathbf{Bool}) \to \mathbf{Bool}$, et montrer qu'elle n'est pas stable. On peut alors montrer (avec un peu plus de définitions) qu'il n'y a pas de terme du lambda-calcul qui calcule le ou parallèle[3].

Exercice 4 – Modèle de Scott

On rappelle le modèle D_∞ de Scott :
– les sous-domaines : D_0 est un cpo. $D_{n+1} = [D_n \to D_n]$.
– la rétraction initiale : $i_0 : D_0 \to D_1,\ d \mapsto (d' \mapsto d)$ et $j_0 : D_1 \to D_0,\ f \mapsto f(\perp)$
– les rétractions suivantes : $i_{n+1} : D_{n+1} \to D_{n+2},\ g \mapsto i_n \circ g \circ j_n$ et $j_{n+1} : D_{n+2} \to D_{n+1},\ g \mapsto j_n \circ g \circ i_n$
– Rappel : pour une suite d'objets $(O_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et de flèches $f_i : O_{i+1} \to O_i$, on définit la limite projective $O_\infty = \{((x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Pi O_i \ :\ f_i(x_{i+1}) = x_i\}$.
– le domaine : D_∞ est la limite projective, $[D_\infty \to D_\infty]$ les suites projectives de fonctions.
– $i_\infty : D_\infty \to [D_\infty \to D_\infty],\ (x_n) \mapsto (x_{n+1})$ et $j_\infty : [D_\infty \to D_\infty] \to D_\infty,\ (f_n) \mapsto (d_n)$ avec $d_0 = j_0(f_0)$ et $d_{n+1} = f_n$.

1. Préciser ce que représente $[D_\infty \to D_\infty]$ et pourquoi c'est un sous-espace de l'espace fonctionel $D_\infty \to D_\infty$.
2. Vérifier que $(D_\infty, i_\infty, j_\infty)$ définit un réflexif extensionnel.

[3]On peut aussi montrer que certaines fonctions stables ne sont pas implémentables dans le lambda-calcul, comme par exemple la fonction de Gustave, mais on n'est pas très loin de caractériser les fonctions du lambda-calcul : les fonctions implémentées dans le lambda-calcul sont les fonctions *hyperstables*.