TD Lambda calcul
Logique combinatoire

3 mars 2009

Exercice 1 – Prouvabilité en logique combinatoire
On définit l'ensemble $\mathcal{C}$ des termes de la logique combinatoire par : $M := \mathcal{V} \mid \mathsf{K} \mid \mathsf{S} \mid (MM)$ où K et S sont des constantes. La théorie (équationelle) de la logique combinatoire (CL) est définie par les axiomes et règles suivants :

$$M = M \quad \mathsf{K}MN = M \quad \mathsf{S}MNP = MP(NP)$$
$$\frac{M = N}{N = M} \quad \frac{M = N \quad N = P}{M = P} \quad \frac{M = M'}{MN = M'N} \quad \frac{N = N'}{MN = MN'}$$

1. Montrer que $\mathsf{SKK}M = M$ est prouvable en CL, en déduire un combinateur d'identité I.
2. Montrer que $\mathsf{B} := \mathsf{S}(\mathsf{KS})\mathsf{K}$ est l'opérateur de composition en CL ($\mathsf{B}MNP = M(NP)$).
3. Soit $\mathrm{C} := \mathsf{S}(\mathsf{BS}(\mathsf{BKS}))(\mathsf{KK})$. Montrer que $\mathrm{C}MNP = MPN$ est prouvable en CL.
4. Montrer que $\mathsf{Y} := \mathsf{S}(\mathsf{CB}(\mathsf{SII}))(\mathsf{CB}(\mathsf{SII}))$ est un combinateur de point fixe en CL.

Exercice 2 – Encodage de l'abstraction
On définit récursivement la construction λ^* pour simuler la λ-abstraction dans CL :
- $\lambda^* x \cdot x := \mathsf{I}$
- $\lambda^* x \cdot P := \mathsf{K}P$ si $x \notin \mathit{vars}(P)$
- $\lambda^* x \cdot PQ := \mathsf{S}(\lambda^* x \cdot P)(\lambda^* x \cdot Q)$

Montrer les propriétés suivantes :

1. $\mathit{vars}(\lambda^* x \cdot P) = \mathit{vars}(P) \setminus \{x\}$
2. Dans la théorie CL, $(\lambda^* x \cdot P)x = P$
3. Dans la théorie CL, $(\lambda^* x \cdot P)Q = P[x := Q]$
4. Si $x \neq y$ et $x \notin \mathit{vars}(Q)$, $(\lambda^* x \cdot P)[y := Q] = \lambda^* x \cdot P[y := Q]$
5. Si $x \neq y$, $y \notin \mathit{vars}(P)$, $\lambda^* x \cdot P = \lambda^* y \cdot P[x := y]$

Exercice 3 – CL extensionnelle
On définit la théorie CLext en ajoutant à CL la règle :

$$\frac{Mx = Nx}{M = N} \text{si } x \notin vars(M) \cup vars(N)$$

1. Montrer que l'on peut prouver dans la théorie CLext :
   (a) $\mathsf{K} = \lambda^* x, y \cdot x$
   (b) $\mathsf{S} = \lambda^* x, y, z \cdot xz(yz)$
   (c) si $M = N$ alors $\lambda^* x \cdot M = \lambda^* x \cdot N$.
2. Montrer que ces assertions ne sont pas prouvables dans CL.

Exercice 4 – Equivalence entre CL et le λ-calcul
Soit les fonctions $\_{CL}$, $\_{\lambda}$ de compilation des λ-termes en termes de $\mathcal{C}$, et inversement :

$$\begin{array}{rcl} (x)_{CL} & := & x \\ (\lambda x \cdot u)_{CL} & := & \lambda^* x \cdot (u)_{CL} \\ (uv)_{CL} & := & (u)_{CL}(v)_{CL} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (x)_\lambda & := & x \\ (K)_\lambda & := & \lambda x, y \cdot x \\ (\mathsf{S})_\lambda & := & \lambda x, y, z \cdot xz(yz) \\ (MN)_\lambda & := & (M)_\lambda (N)_\lambda \end{array}$$

1. Montrer que pour tout λ-terme t, $(t_{CL})_\lambda =_\beta t$.
2. Montrer que pour tout terme u de $\mathcal{C}$, $(M_\lambda)_{CL} = M$ est vrai dans CLext.
3. Montrer que si $M = N$ est prouvable dans CL alors $M_\lambda =_\beta N_\lambda$.
4. Calculer $(\lambda x, y \cdot xyy)_{CL}$.

Exercice 5 – Terme base du lambda-calcul
Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de λ-termes clos. L'ensemble des termes engendrés par $\mathcal{X}$ est le plus petit ensemble $\mathcal{X}^+$ de λ-termes tel que :
– $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}^+$
– si $u, v \in \mathcal{X}^+$ alors $(uv) \in \mathcal{X}^+$
On dit que $\mathcal{X}$ est une *base* pour un ensemble $\mathcal{A}$ de λ-termes si

$$\forall a \in \mathcal{A}\ \exists u \in \mathcal{X}^+\ u =_\beta a$$

1. Montrer que $\{\mathsf{K}_\lambda, \mathsf{S}_\lambda\}$ est une base de l'ensemble des λ-termes clos
2. Montrer que $\{\mathsf{X}\}$ aussi, avec $\mathsf{X} = \lambda z \cdot z\mathsf{K}_\lambda \mathsf{S}_\lambda \mathsf{K}_\lambda$ (on pourra calculer XXX et $\mathsf{X(XX)}$).