

TD Lambda calcul : Stratégies de réduction, théorème de standardisation

13 mars 2007

Corrigé de l'exercice 1

1. $SKKM = KM(KM) = M$. On pose $l := SKK$.
2. $BMNP = S(KS)KMNP$
 $= KSM(KM)NP$
 $= S(KM)NP$
 $= KMP(NP)$
 $= M(NP)$
3. $BMNP = S(BS(BKS))(KK)MNP$
 $= BS(BKS)M(KKM)NP$
 $= S((BKS)M)(KKM)NP$
 $= S(BKSM)(KKM)NP$
 $= S(K(SM))(KKM)NP$
 $= S(K(SM))KNP$
 $= K(SM)N(KN)P$
 $= SM(KN)P$
 $= MP(KNP)$
 $= MPN$
4. $YM = S(CB(SII))(CB(SII))M$
 $= (CB(SII))M((CB(SII))M)$
 $= CB(SII)M(CB(SII)M)$
 $= BM(SII)(CB(SII)M)$
 $= BM(SII)(BM(SII))$
 $= M(SII(BM(SII)))$
 $= M(I(BM(SII))(IBM(SII)))$
 $= M((BM(SII))(BM(SII)))$
 $= M(YM)$

Corrigé de l'exercice 2

1. Par récurrence sur P . Cas de base :
 - si $P = x$, $\lambda^*x \cdot P = l$, $vars(\lambda^*x \cdot P) = \emptyset$,
 - si $P = y \neq x$, $\lambda^*x \cdot P = Ky$, $vars(\lambda^*x \cdot P) = \{y\}$,
 - si $P = K$, $\lambda^*x \cdot P = KK$, $vars(\lambda^*x \cdot P) = \emptyset$,
 - si $P = S$, $\lambda^*x \cdot P = KS$, $vars(\lambda^*x \cdot P) = \emptyset$.

Étape de récurrence : si $P = P_1P_2$, $\lambda^*x \cdot P := S(\lambda^*x \cdot P_1)(\lambda^*x \cdot P_2)$ et $\text{vars}(\lambda^*x \cdot P) = \text{vars}(\lambda^*x \cdot P_1) \cup \text{vars}(\lambda^*x \cdot P_2) = (\text{vars}(P_1) \setminus \{x\}) \cup (\text{vars}(P_2) \setminus \{x\})$ par h.r.

2. Par récurrence sur P . Cas de base :

- si $P = x$, $(\lambda^*x \cdot P)x = lx = x$,
- si $P = y \neq x$ ou $P = K$ ou $P = S$, $(\lambda^*x \cdot P)x = KPx = P$.

Étape de récurrence : si $P = P_1P_2$,

$$\begin{aligned} (\lambda^*x \cdot P)x &= S(\lambda^*x \cdot P_1)(\lambda^*x \cdot P_2)x \\ &= (\lambda^*x \cdot P_1)x((\lambda^*x \cdot P_2)x) \\ &= P_1P_2 \end{aligned} \quad \text{par h.r.}$$

3. Par récurrence sur P . Cas de base :

- si $P = x$, $(\lambda^*x \cdot P)Q = lQ = P[x := Q]$,
- si $P = y \neq x$ ou $P = K$ ou $P = S$, $(\lambda^*x \cdot P)x = KPx = P[x := Q]$.

Étape de récurrence : si $P = P_1P_2$,

$$\begin{aligned} (\lambda^*x \cdot P)Q &= S(\lambda^*x \cdot P_1)(\lambda^*x \cdot P_2)Q \\ &= (\lambda^*x \cdot P_1)Q((\lambda^*x \cdot P_2)Q) \\ &= P_1[x := Q]P_2[x := Q] \quad \text{par h.r.} \\ &= P[x := Q] \end{aligned}$$

4. Par récurrence sur P . Cas de base :

- si $P = x$, $(\lambda^*x \cdot P)[y := Q] = l[y := Q] = l = \lambda^*x \cdot (P[x := Q])$
- si $P = y$, $(\lambda^*x \cdot P)[y := Q] = (Ky)[y := Q] = KQ$ car $y \neq x$. D'autre part, $\lambda^*x \cdot (P[y := Q]) = \lambda^*x \cdot Q = KQ$ car par hypothèse $x \notin \text{vars}(Q)$,
- si $P = z \neq x, y$ ou $P = K$ ou $P = S$, $(\lambda^*x \cdot P)[y := Q] = (KP)[y := Q] = K(P[y := Q]) = \lambda^*x \cdot (P[y := Q])$.

Étape de récurrence : si $P = P_1P_2$,

$$\begin{aligned} (\lambda^*x \cdot P)[y := Q] &= (S(\lambda^*x \cdot P_1)(\lambda^*x \cdot P_2))[y := Q] \\ &= S(\lambda^*x \cdot (P_1[y := Q]))(\lambda^*x \cdot (P_2[y := Q])) \quad \text{par h.r.} \\ &= \lambda^*x \cdot (P[y := Q]) \end{aligned}$$

5. Par récurrence sur P . Cas de base :

- si $P = x$, $\lambda^*x \cdot P = l = \lambda^*y \cdot y = \lambda^*y \cdot P[x := y]$.
- si $P = z \neq x, y$ ou $P = K$ ou $P = S$, $\lambda^*x \cdot P = KP = \lambda^*y \cdot P = \lambda^*y \cdot P[x := y]$.

Étape de récurrence : si $P = P_1P_2$,

$$\begin{aligned} \lambda^*x \cdot P &= S(\lambda^*x \cdot P_1)(\lambda^*x \cdot P_2) \\ &= S(\lambda^*y \cdot (P_1[x := y]))(\lambda^*y \cdot (P_2[x := y])) \quad \text{par h.r.} \\ &= \lambda^*y \cdot P[x := y] \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3

1. (a) Pour deux variables distinctes v_1, v_2 , on a $(\lambda^*x \cdot \lambda^*y \cdot x)v_1v_2 = v_1 = Kv_1v_2$ (dans CL, en utilisant l'exercice ??). Donc $\lambda^*x \cdot y \cdot x = K$ en utilisant la règle supplémentaire de CLExt.
 - (b) Pour trois variables distinctes v_1, v_2, v_3 , on a $(\lambda^*x \cdot \lambda^*y \cdot \lambda^*z \cdot xz(yz))v_1v_2v_3 = v_1v_3(v_2v_3) = Sv_1v_2v_3$ (dans CL). Donc $\lambda^*x \cdot \lambda^*y \cdot x = K$ en utilisant la règle supplémentaire de CLExt.
 - (c) Pour une variable $y \neq x$, $(\lambda^*x \cdot M)y = M[x := y] = N[x := y]$ car $M = N$ par hypothèse. D'autre part, $(\lambda^*x \cdot N)y = N[x := y]$ (dans CL). Donc $\lambda^*x \cdot M = \lambda^*x \cdot N$.
2. (a) par construction, $\lambda^*x \cdot \lambda^*y \cdot x = \lambda^*x \cdot Kx = S(\lambda^*x \cdot K)(\lambda^*x \cdot x) = S(KK)l$. Ce dernier terme n'est pas simplifiable dans CL, donc il est différent de K dans CL.

On remarque que pour une variable z quelconque, $(\lambda^*x \cdot y \cdot x)z = \lambda^*x \cdot Kx = S(KK)lz = KKz(lz) = K(lz) = Kz$.

(b) Par construction :

$$\begin{aligned}
\lambda^*x \cdot \lambda^*y \cdot \lambda^*z \cdot xz(yz) &= \lambda^*x \cdot \lambda^*y \cdot S(\lambda^*z \cdot xz)(\lambda^*z \cdot yz) \\
&= \lambda^*x \cdot \lambda^*y \cdot S(S(\lambda^*z \cdot x)(\lambda z \cdot z))(S(\lambda^*z \cdot y)(\lambda^*z \cdot z)) \\
&= \lambda^*x \cdot \lambda^*y \cdot S(S(Kx)I)(S(Ky)I) \\
&= \lambda^*x \cdot S(\lambda^*y \cdot S(S(Kx)I))(\lambda^*y \cdot S(Ky)I) \\
&= \lambda^*x \cdot S(KS(S(Kx)I))(S(\lambda^*y \cdot S(Ky))(\lambda^*y \cdot I)) \\
&= \lambda^*x \cdot SS(S(\lambda^*y \cdot S(Ky))(\lambda^*y \cdot I)) \\
&= \lambda^*x \cdot SS(S(S(\lambda^*y \cdot S)(\lambda^*y \cdot (Ky)))(KI)) \\
&= \lambda^*x \cdot SS(S(S(KS)(S(\lambda^*y \cdot K)(\lambda^*y \cdot y)))(KI)) \\
&= \lambda^*x \cdot SS(S(S(KS)(S(KK)I))(KI)) \\
&= S(\lambda^*x \cdot SS)(\lambda^*x \cdot S(S(KS)(S(KK)I))(KI)) \\
&= S(KSS)(KS(S(KS)(S(KK)I))(KI)) \\
&= SS(S(KI))
\end{aligned}$$

Ce dernier terme n'est pas simplifiable dans CL, donc il est différent de K dans CL.

(c) On pose $M = lx$ et $N = x$. On a bien $M = x$ dans CL.

Par définition, $\lambda^*x \cdot M = \lambda^*x \cdot lx = S(KI)I$ et ce dernier terme est différent de $\lambda^*x \cdot x = I$ dans CL.

Corrigé de l'exercice 4

1. Par récurrence sur la taille de t .

- si t est une variable, $(t_{CL})_\lambda = t$.
- si $t = uv$, $(t_{CL})_\lambda = (u_{CL}v_{CL})_\lambda = (u_{CL})_\lambda(u_{CL})_\lambda =_\beta uv$ par h.r.
- si $t = \lambda x \cdot u$, $(t)_{CL} = \lambda^*x \cdot (u)_{CL}$.

- si $u = x$,

$$\begin{aligned}
(t_{CL})_\lambda &= (I)_\lambda = (SKK)_\lambda \\
&= S_\lambda K_\lambda K_\lambda \\
&= (\lambda x, y, z \cdot xz(yz))K_\lambda K_\lambda \\
&\rightarrow_{*\beta} \lambda z \cdot K_\lambda z(K_\lambda z) \\
&= \lambda z \cdot (\lambda x, y \cdot x)z(K_\lambda z) \\
&\rightarrow_\beta \lambda z \cdot z
\end{aligned}$$

- si $x \notin \text{fv}((u))$, on a $x \notin \text{vars}(u_{CL})$, et donc $t_{CL} = K_\lambda u_{CL}$,

$$\begin{aligned}
(t_{CL})_\lambda &= K_\lambda(u_{CL})_\lambda \\
&=_\beta K_\lambda u \quad \text{par h.r.} \\
&=_\beta \lambda y \cdot u \\
&=_\alpha t \quad \text{par hyp.}
\end{aligned}$$

- si $u = vw$, $t_{CL} = S(\lambda^*x \cdot v_{CL})(\lambda^*x \cdot w_{CL})$.

On peut appliquer l'h.r. à $\lambda x \cdot v$ et $\lambda x \cdot w$, ce qui donne $(\lambda^*x \cdot v_{CL})_\lambda =_\beta \lambda x \cdot v$ et $(\lambda^*x \cdot w_{CL})_\lambda =_\beta \lambda x \cdot w$.

$$\begin{aligned}
(t_{CL})_\lambda &= S_\lambda(\lambda^*x \cdot v_{CL})_\lambda(\lambda^*x \cdot w_{CL})_\lambda \\
&= (\lambda x, y, z \cdot xz(yz))(\lambda^*x \cdot v_{CL})_\lambda(\lambda^*x \cdot w_{CL})_\lambda \\
&\rightarrow_{*\beta} \lambda z \cdot (\lambda^*x \cdot v_{CL})_\lambda z((\lambda^*x \cdot v_{CL})_\lambda z) \\
&=_\beta \lambda z \cdot (\lambda x \cdot v)z((\lambda x \cdot w)z) \\
&=_\beta \lambda z \cdot v[x := z] w[x := z] \quad z \notin \text{fv}((v), w) \\
&=_\alpha t
\end{aligned}$$

2. On vérifie pour S et K, puis récurrence.

3. Par récurrence sur la taille de la preuve de $M = N$ dans CL.

- c'est vrai pour les 3 axiomes, avec la définition de K_λ et S_λ .
- les étapes de récurrence sont immédiates par définition de $=_\beta$ (clôture par contexte et équivalence).

4. On choisit le contre-exemple $M = \lambda^*x \cdot lx = S(KI)I$ et $N = I$.

$M = N$ n'est pas vrai dans CL alors que :

$$\begin{aligned}
M_\lambda &= S_\lambda(K_\lambda I_\lambda) I_\lambda \\
&= (\lambda x, y, z \cdot xz(yz))(K_\lambda I_\lambda) I_\lambda \\
&\rightarrow *_\beta \lambda z \cdot K_\lambda I_\lambda z (I_\lambda z) \\
&\rightarrow *_\beta \lambda z \cdot (\lambda x, y \cdot x) I_\lambda z ((\lambda x \cdot x) z) \\
&\rightarrow *_\beta \lambda z \cdot z \\
&=_\beta N_\lambda
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5

1. On peut montrer que pour tout λ -terme clos t , t_{CL} ne contient pas de variable, c'est à dire qu'il est formé de K , S et l'application. Donc $(t_{CL})_\lambda \in \{K_\lambda, S_\lambda\}^+$ et par l'exercice ??, $(t_{CL})_\lambda =_\beta t$.

$$\begin{aligned}
2. \text{ XXX} &\rightarrow *_\beta (XK_\lambda S_\lambda K_\lambda)X \\
&\rightarrow *_\beta (K_\lambda K_\lambda S_\lambda K_\lambda S_\lambda K_\lambda)X \\
&\rightarrow *_\beta K_\lambda K_\lambda S_\lambda K_\lambda X \\
&\rightarrow *_\beta K_\lambda K_\lambda X \\
&\rightarrow *_\beta K_\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X(XX) &\rightarrow *_\beta X(XK_\lambda S_\lambda K_\lambda) \\
&\rightarrow *_\beta X(K_\lambda K_\lambda S_\lambda K_\lambda S_\lambda K_\lambda) \\
&\rightarrow *_\beta X(K_\lambda K_\lambda S_\lambda K_\lambda) \\
&\rightarrow *_\beta X(K_\lambda K_\lambda) \\
&\rightarrow *_\beta K_\lambda K_\lambda K_\lambda S_\lambda K_\lambda \\
&\rightarrow *_\beta K_\lambda S_\lambda K_\lambda \\
&\rightarrow *_\beta S_\lambda
\end{aligned}$$

Soit t un λ -terme clos. On construit un terme de $\{X\}^*$ à partir de $(t_{CL})_\lambda$ (qui est dans $\{K_\lambda, S_\lambda\}^+$ par la question précédente), en remplaçant toute occurrence de K_λ par XXX et toute occurrence de S_λ par $X(XX)$.