TD Lambda calcul

—

Stratégies perpétuelles, listes, entiers de Church

E. Lozes

17 février 2009

Exercice 1 – Stratégies perpétuelles

On appelle stratégie toute relation $R \subseteq \rightarrow_\beta$ qui est déterministe, i.e. uRv et uRv' impliquent $v = v'$. Une stratégie R est dite perpétuelle si "uRv" et "v est fortement normalisant" impliquent "u est fortement normalisant".

- On considère la stratégie suivante
  - $\lambda x.u \ R \ \lambda x.v$ si $u \ R \ v$
  - $uv \ R \ u'v$ si uRu'
  - $(\lambda x.u)v \ R \ u[x := v]$ si u est en forme normale
  - $uv \ R \ u \ v'$ si u est en forme normale et on n'est pas dans le cas précédent.

  Montrer que cette stratégie n'est pas perpétuelle.
- On considère la stratégie suivante :
  - $\lambda x.u \ R \ \lambda x.v$ si $u \ R \ v$
  - $uv \ R \ uv'$ si vRv'
  - $(\lambda x.u)v \ R \ u[x := v]$ si v est en forme normale
  - $uv \ R \ u' \ v$ si v est en forme normale et on n'est pas dans le cas précédent.

  Montrer que cette stratégie n'est pas perpétuelle.

Exercice 2 – Listes

On choisit de représenter la liste $[u_1, .., u_n]$ par $\lambda f, x. \ fu_1(fu_2..(fu_nx)..)$, et donc $\underline{nil}$ par $\lambda f, x.x$.

1. Vérifier que $\underline{cons} = \lambda a, l, f, x. \ fa(lfx)$ définit bien l'ajout en tête de liste, i.e $\underline{cons} \ u_0 \ [u_1, ..u_n] \ \rightarrow^* [u_0, .., u_n]$.
2. Vérifier que $\underline{hd} = \lambda l.l(\lambda y, z.y)\underline{nil}$ définit bien la sélection de tête de liste, i.e. $\underline{hd} \ (\underline{cons} \ a \ l) \ \rightarrow^* \ a$. Que vaut $\underline{hd} \ \underline{nil}$?
3. Définir la fonction $\underline{map}$ telle que $\underline{map} \ g \ [u_1, .., u_n] \ =_\beta \ [gu_1, .., gu_n]$.
4. Quelle fonction calcule $\lambda l, l'.l \ \underline{cons} \ l'$?
5. En utilisant un raisonnement analogue à celui qui conduit au prédécesseur pour les entiers, définir le terme $\underline{tl}$ qui renvoie la queue de la liste.
6. Définir la fonction $\underline{length}$ qui renvoie l'entier de Church correspondant à la longueur de la liste.

Exercice 3 – Entiers de Church (rappel de cours, 1)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\underline{n} = \lambda f, x.f^n x$, avec $f^n x \;=\; \underbrace{f(..f(fx))}_{n \text{ fois}}$. Montrer que l'on peut définir des termes S, $\underline{+}$, $\underline{\times}$ et $\underline{\exp}$ tels que $S\underline{n} \to^* \underline{n+1}$, $\underline{+}\ \underline{n}\ \underline{m}\ \to^* \underline{n+m}$, $\underline{\times}\ \underline{n}\ \underline{m}\ \to^* \underline{nm}$, et $\underline{\exp}\ \underline{n}\ \underline{m} \to^* \underline{n^m}$,

Exercice 4 – Entiers de Church (rappel de cours, 2)
On veut maintenant encoder la fonction prédécesseur. Pour cela, on aura besoin d'encoder un couple d'entiers, ou plus généralement un couple de termes. On pose $\langle M, N\rangle \;=\; (\lambda x.\ xMN)$.

1. Définir les termes $\underline{\text{pair}}$, π_1 et π_2 tels que $\underline{\text{pair}}\ MN\ \ \to^* \langle M, N\rangle$, et $\pi_i\langle M_1, M_2\rangle \to^* M_i$. A-t-on en général $\underline{pair}\ (\pi_1 s)\ (\pi_2 s)\ =_\beta s$?
2. On définit $P \;=\; \lambda k.\ \pi_2(k\ \underline{shift}\ \langle \underline{0}, \underline{0}\rangle)$, où $\underline{shift} = \lambda s.\langle S(\pi_1 s), \pi_1 s\rangle$. Que vaut $P\underline{0}$? Quel est le temps de calcul (nombre de réductions) de $P\underline{n}$?
3. En déduire un encodage de $\underline{-}$ tel que $\underline{-}\ \underline{m}\ \underline{n}\ \to^*\ \underline{\max(m-n, 0)}$.

Exercice 5 – Tests booléens (rappels de cours)
On encode une valeur booléene en posant $\underline{V} = \lambda x, y.x$ et $\underline{F} = \lambda x, y.y$.

1. Définir un terme $\underline{\text{ifthenelse}}$ tel que $\underline{\text{ifthenelse}}\ \underline{V}MN \to^* M$ et $\underline{\text{ifthenelse}}\ \underline{F}MN \to^* N$.
2. Définir un terme $\underline{\text{iszero ?}}$ tel que $\underline{\text{iszero ?}}\ \underline{0} \to^* \underline{V}$ et $\underline{\text{iszero ?}}\ \underline{n+1}\ \to^*\ \underline{n}$.
3. Définir la conjonction, la disjonction, l'implication et la négation de booléens.
4. En déduire un terme $\underline{\text{equal ?}}$ qui teste l'égalité de deux entiers.

Exercice 6 – Points fixes (rappels de cours)
On considère ici deux réalisation de combinateurs de point fixe :

$$Y \;=\; \lambda f.\ \big(\lambda x.\ f(xx)\big)\ \big(\lambda x.\ f(xx)\big) \quad \text{et} \quad \Theta \;=\; \big(\lambda g, h.\ h(ggh)\big)\ \big(\lambda g, h.\ h(ggh)\big)$$

1. Montrer qu'il existe F tel que l'équation $\underline{fact}\ =_\beta\ F\ \underline{fact}$ corresponde à la sémantique de la factorielle.
2. Montrer que $Y\ F\ \ =_\beta\ F(YF)$.
3. Montrer que $\Theta\ F\ \ \to^*\ F(\Theta F)$.