TD non non traduction

E. Lozes

12 mai 2009

Exercice 1 – Non-non traduction
On appelle non-non traduction d'une formule F la formule $F^{\neg\neg}$ définie par

$$F^{\neg\neg} \stackrel{def}{=} \neg\neg F^o \quad A^o \stackrel{def}{=} A \quad (F \Rightarrow G)^o \stackrel{def}{=} F^o \Rightarrow G^{\neg\neg}$$

avec $\neg F \stackrel{def}{=} F \Rightarrow \bot$. Le but de l'exercice est d'étudier en quel sens cette traduction est un plongement de la logique classique dans la logique intuitionniste.

1. Montrer par un argument sémantique que F et $F^{\neg\neg}$ sont équivalents en logique classique.
2. Construire des preuves intuitionnistes des propriétés suivantes :
   (a) A partir de $u : F$, construire $u^- : \neg\neg F$
   (b) A partir de $u : F \Rightarrow G$ et $v : \neg G$, construire $u \bullet v : \neg F$.
   (c) A partir de $u : \neg\neg\neg F$, construire $u^o : \neg F$
   (d) A partir de $u : \neg\neg(F \Rightarrow G)$ et $v : \neg\neg F$, construire $u \star v : \neg\neg G$
3. On cherche maintenant à expliciter les preuves de $F^{\neg\neg} \Rightarrow F$ et $F \Rightarrow F^{\neg\neg}$ dont on connait l'existence par la question 1. On rappelle qu'une preuve en logique classique est un λ-terme typé :

$$u, v \ ::= \quad x \mid \lambda x.u \mid uv \mid \mathrm{C}u \qquad \frac{\Gamma \vdash u : \neg\neg F}{\Gamma \vdash \mathrm{C}u : F}(\neg\neg E)$$

   Définir par induction mutuelle $u_F : F \Rightarrow F^{\neg\neg}$ et $v_F : F^{\neg\neg} \Rightarrow F$ pour tout F (Indication : on utilisera les constructions de la question 2, par exemple si $x : F^o$, alors $v_F x^- : F$, et si $x : \neg\neg F^{\neg\neg}$, alors $(u_F x)^o : F^{\neg\neg}$)

Exercice 2 – Traduction des preuves classiques en intuitionnistes
On considère à nouveau la traduction de l'exercice précédent.

1. On cherche maintenant à construire une preuve intuitioniste de $F^{\neg\neg}$ à partir d'une preuve classique de F, et vice versa. On rappelle qu'une preuve en logique intuitionniste (avec négation, donc faux) est un λ-terme typé :

$$u, v \ ::= \quad x \mid \lambda x.u \mid uv \mid \nabla u \qquad \frac{\Gamma \vdash u : \bot}{\Gamma \vdash \nabla u : F}(\bot E)$$

(a) A partir d'une preuve intuitionniste de $F^{\neg\neg}$, construire une preuve classique de F (on utilisera l'exercice 1).

(b) Pour tout terme u dans λC, définir par récurrence un terme u^* dans $\lambda\nabla$ tel que

$$\text{si} \quad x_1 : F_1, .., x_n : F_n \vdash u : F \qquad \text{alors} \quad x_1 : F_1^o, .., x_n : F_n^o \vdash u^* : F^{\neg\neg}.$$

2. Montrer par un argument sémantique que F est prouvable en logique classique ssi $F^{\neg\neg}$ est prouvable en logique intuitionniste (on rappelle la sémantique intuitionniste $[\![F \Rightarrow G]\!]_v^\nabla = ((\mathbb{R} - [\![F]\!]_i^\nabla) \cup [\![G]\!]_v^\nabla)^o$, où A^o est l'intérieur de A).

Exercice 3 – Traduction en style par continuation par valeur de Plotkin

On considère la traduction suivante :

$$\begin{array}{rcl}
\langle x\rangle^o k & \stackrel{def}{=} & kx \\
\langle \lambda x.u\rangle^o k & \stackrel{def}{=} & k(\lambda x.\lambda k'.\langle u\rangle^o k') \\
\langle uv\rangle^o k & \stackrel{def}{=} & \langle u\rangle^o(\lambda x.\langle v\rangle^o(\lambda y.xyk)) \\
\langle \mathcal{C}u\rangle^o k & \stackrel{def}{=} & \langle u\rangle^o(\lambda x.x(\lambda y, k'.ky)(\lambda z.z))
\end{array}$$

Un lambda-terme est appellé une une P-valeur si c'est une variable ou une abstraction.

1. Définir $F^* =$ et F^o tels que si $\Gamma \vdash u : F$, alors $\Gamma^o \vdash \lambda k : \neg F^o.\langle u\rangle^o : F^*$.
2. Montrer que l'on peut simuler l'appel par valeur, i.e. : $\langle V\rangle^o(\lambda x.\langle u\rangle^o k) \rightarrow \langle u[x := V]\rangle^o k$, où V est une P-valeur. En déduire que $\langle(\lambda x.u)V\rangle^o k \rightarrow^+ \langle u[x := V]\rangle^o k$.
3. Montrer que les réductions suivantes sont simulées par $=_{\beta\eta}$ dans la traduction :

$$\begin{array}{lrcll}
(\mathcal{C}_L) & \mathcal{C}uv & \rightarrow & \mathcal{C}(\lambda k'.u(\lambda f.k'(fv))) & \\
(\mathcal{C}_R) & V(\mathcal{C}u) & \rightarrow & \mathcal{C}(\lambda k'.u(\lambda x.k'(Vx))) & \\
(\eta\mathcal{C}) & (\lambda k.ku) & \rightarrow & u & (k \notin \mathsf{fv}(()u))
\end{array}$$